

Diplomarbeit

Biorthogonale Funktionensysteme zur Hochgeschwindigkeitsdatenübertragung

durchgeführt im xDSL-Kompetenzzentrum der Siemens AG,
ICN WN BA A,
Hofmannstrasse 51, D-81379 München

unter Anleitung von
Dr. Werner Kozek

im Rahmen des Studiums an der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen,
Fachbereich Mathematik

betreut durch
Prof. Dr. Wolfgang Dahmen

von

Jörn Ungermann

Matr.Nr. 209584
Kastanienweg 31, D-52074 Aachen

Aachen, den 21. September 2000

Zusammenfassung

Zur Datenübertragung durch translations-invariante Kanäle werden aus Riesz-Basen des $L^2(\mathbb{R})$ informationstragende Signale konstruiert, die durch Faltungsoperatoren verzerrt und durch weißes Rauschen gestört werden. Anschließend wird versucht die Information aus dem gestörten Signal zu extrahieren. Zur Optimierung der Übertragung werden Funktionensysteme benötigt, die gut in der Zeit-Frequenzebene lokalisiert sind, so daß sich die Störungen mit geringem Aufwand entfernen lassen. Im ersten Teil dieser Arbeit werden die theoretischen Grundlagen zur Konstruktion solcher Übertragungssysteme erarbeitet. Die Frame-Theorie bildet den allgemeinen Hintergrund, mit dem Weyl-Heisenberg- und Wavelet-Systeme eingeführt werden. Der zweite Teil stellt Algorithmen zur Implementation dieser Systeme an modernen Rechensystemen vor. Zum Schluß wird als konkrete Anwendung ADSL mit seinem Funktionensystem DMT-ANSI vorgestellt und in diesem Rahmen werden Wavelet-basierte Systeme mit dem etablierten System verglichen.

Abstract

To transmit data through translation-invariant channels, information-bearing signals are constructed from Riesz bases of $L^2(\mathbb{R})$. These signals are disturbed by convolution operators and additive white noise. The problem addressed here is to extract the information from the disturbed signals. In order to minimize the amount of work necessary to reconstruct the original information, function systems are needed which are well localized in the time-frequency plane. The theory of the construction of such functions is presented in the first part of this thesis. Weyl-Heisenberg systems and Wavelet based systems are introduced from a frame theoretic point of view. The second part focusses on algorithms used to implement these systems on a computer. Finally the real-world transmission system ADSL is introduced. The function systems mentioned above are then tested in comparison to the well established DMT-ANSI.

Erklärung

Ich versichere, die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt zu haben.
Alle verwendeten Quellen und Hilfsmittel sind in dem Literaturverzeichnis aufgeführt.

Aachen, den 21. September 2000

Jörn Ungermann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Basen in Hilberträumen	4
2.1	Frames	6
2.2	Riesz-Basen	8
3	Kohärente Systeme	11
3.1	Translationsinvariante Systeme	11
3.2	Weyl-Heisenberg-Systeme	12
3.3	Wilson-Basen	16
3.4	Wavelets	16
3.5	Multi-Skalen-Analyse	18
3.6	Biorthogonale Wavelets	20
3.7	Wavelet-Pakete	23
4	Diskretisierung	26
4.1	Schnelle Fourier-Transformation	27
4.2	Weyl-Heisenberg-Systeme	29
4.3	Wavelets	30
4.4	Wavelet-Pakete	33
5	Modellierung	34
5.1	ADSL	34
5.2	Kanalmodell	36
5.3	DMT	38
5.4	Entzerrer	40
6	Numerische Ergebnisse	46
6.1	Die Modulationssysteme	53
6.2	Entzerrer	54
6.3	Fazit	59

A	Dokumentation der Simulationsumgebung	61
A.1	Die Simulationsumgebung	61
A.2	Modulations- und Demodulationsfunktionen	63
A.3	Entzerrer	64
A.4	Wavelets	65

Kapitel 1

Einleitung

Seit der Erfindung des Telefons hat sich der Bedarf an Kommunikation und Datenaustausch vervielfacht. In den siebziger Jahren begann die Vernetzung der neuen Rechenmaschinen, eine Entwicklung, die ihren vorläufigen Höhepunkt im Internet gefunden hat. Millionen Menschen in der ersten Welt und zunehmend auch in Entwicklungsländern tauschen täglich Daten in einer Größenordnung von vielen Terrabyte aus. Bestellungen in Millionenhöhe werden über diese Datenleitungen abgewickelt, genauso wie minutenaktuelle Nachrichtmeldungen oder private Kommunikation in sogenannten Chaträumen.

Dieses enorme Angebot an Kommunikationsmöglichkeiten hat einen Bedarf an Übertragungskapazität entfesselt, der kaum schnell genug befriedigt werden kann. Glasfaserkabel und Satelliten verbinden Kontinente und besitzen — im Moment — noch genügend Kapazität, um den gewaltigen transkontinentalen Datenaustausch zu bewältigen. Jedoch treten bei dem augenscheinlich einfachsten Problem, der Anbindung des Nutzers an dieses Netz, die größten Probleme auf. Es stehen im Vergleich zu Glasfaserkabeln nur schlechte Übertragungsmedien wie Kupferkabel oder Funkverbindungen zur Verfügung. Hier ist man deshalb schon heute auf komplexe Modulations- und Demodulationstechniken angewiesen, die in naher Zukunft sicherlich auch ihren Weg zu den transnationalen Netzen finden werden, um dem abermals gestiegenen Bedarf entgegenzutreten. Obwohl diese Modulationstechniken nur einen kleinen Teil des gewaltigen Aufwands verursachen, der für moderne Datenübertragungen notwendig ist (s. Abb. 1.1), bilden sie doch die Grundlage und sind zum größten Teil für die Latenzzeit und Übertragungsrate verantwortlich.

Für die Modulation werden stabile Funktionensysteme $\{f_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ benutzt, die gewichtet mit Faktoren $c_l \in l^2(\mathbb{Z})$ summiert und übertragen werden. Dabei sollen diese Funktionen aus praktischen Gründen verschiedene Eigenschaften besitzen.

- Die Länge ihres Trägers ist proportional zu der Zeit, die die kleinste Informationseinheit benötigt, um vom Sender zum Empfänger zu gelangen. Also werden Funktionen mit kompaktem Träger benötigt, oder zumindest Funktionen, die so stark abfallen, daß ihre Funktionswerte außerhalb eines kompakten Bereichs im thermischen Rauschen des Kanals verschwinden.
- Die L^2 -Norm der Funktionen ist proportional zu der zum Senden dieser Funktionen

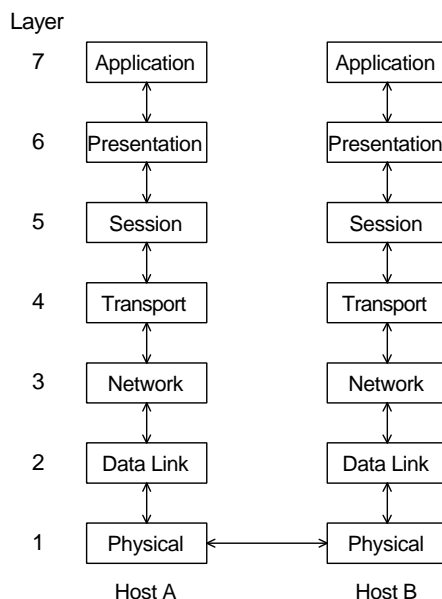


Abbildung 1.1: Das OSI-Referenzmodell beschreibt die verschiedenen Schritte, die bei einer Kommunikation zwischen zwei Entitäten durchlaufen werden müssen [36]. Die in dieser Arbeit betrachteten Modulationsverfahren finden sich in Schicht eins wieder und bilden die Voraussetzung für die Dienste der anderen Schichten.

benötigten Energie. Da naturgemäß nur endlich viel Energie zur Verfügung steht und mehr Energie auch mehr Störungen für andere Systeme bedeutet, sollen die Funktionen endliche Energie besitzen, also Element des $L^2(\mathbb{R})$ sein.

- Es sollen einfache Verfahren existieren, um aus dem Sendesignal wieder die Gewichtungsfaktoren (die Information) zu extrahieren.
- Ein Kabel, auf dem elektrische Signale übertragen werden, empfängt und sendet elektromagnetische Wellen. Um Störungen der Übertragung gering zu halten und andere Dienste nicht zu stören, sollen die Funktionen nur definierte Frequenzbereiche benutzen.

Die Darstellung einer Funktion im Frequenzbereich erhält man durch die Fouriertransformation, die in dieser Arbeit als

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i \xi t} dt$$

definiert ist. Dieses Integral ist zunächst nur für Funktionen des $L^1(\mathbb{R})$ definiert, läßt sich aber durch Grenzwertprozesse auch für Funktionen des $L^2(\mathbb{R})$ definieren [28, Seite 16]. Sei nun noch für $f \in L^2(\mathbb{R})$ $\|f\| := \langle f, f \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx$. Mit Hilfe der Fouriertransformation lassen sich die obigen Anforderungen nach guter Lokalisation in Zeit und Frequenz präzisieren.

Definition 1.1 Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Seien außerdem

$$\begin{aligned} t_0 &:= \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt, \\ \xi_0 &:= \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, \\ \sigma_t^2 &:= \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt, \\ \sigma_\xi^2 &:= \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Sind t_0 und ξ_0 endlich, so heißt f lokalisiert bei t_0 im Zeitbereich und bei ξ_0 im Frequenzbereich. Die Güte der Lokalisation wird durch die Größe von σ_t und σ_ξ angegeben; je kleiner das Produkt $\sigma_t \sigma_\xi$ ist, desto besser ist die Funktion lokalisiert. Man beachte: Gilt $\|f\| = 1$, so kann man t_0 und ξ_0 als Erwartungswerte und σ_t und σ_ξ als Varianzen der Zufallsvariablen h und \hat{h} interpretieren.

Außer dieser komplexen Lokalisation, die nach der Weyl-Heisenbergschen Unschärferelation immer größer gleich $\frac{1}{4\pi}$ ist, betrachtet man bei Funktionen, die von \mathbb{R} nach \mathbb{R} gehen, die reelle Lokalisation. Da die Fouriertransformation solcher Funktionen symmetrisch bezüglich der Ordinate ist, wären diese bei obiger Definition immer schlecht in der Frequenzebene lokalisiert. Bei solchen Funktionen betrachtet man für die Bestimmung der Frequenzlokalisierung nur die Integrale über die positive Halbachse.

Gute Frequenzlokalisierung hat noch einen weiteren Vorteil. Die Funktionen werden bei der Übertragung durch einen Faltungsoperator verzerrt, so daß eventuell vorhandene Orthogonalitäten verloren gehen können. Liegen nun zwei Funktionen aufgrund ihrer guten Frequenzlokalisierung in disjunkten Frequenzbändern, so bleiben sie nach der Faltung weiterhin orthogonal zueinander, da der Faltungsoperator im Frequenzbereich wie ein Multiplikator wirkt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, die mathematischen Grundlagen für solche Funktionensysteme zusammenzustellen und dann die in den letzten Jahren bei der Signal- und Bildverarbeitung sehr erfolgreichen Waveletsysteme in diesem Umfeld zu testen. In Kapitel 2 werden Frames und Rieszbasen vorgestellt und so die Grundlagen für stabile biorthogonale Basen erarbeitet. In Kapitel 3 werden dann Weyl-Heisenberg-Systeme, Wavelets und von diesen abgeleitete Systeme eingeführt. Im folgenden wird die Diskretisierung dieser Funktionensysteme besprochen und effiziente Algorithmen für die Implementation auf Rechensystemen vorgestellt. In Kapitel 5 wird nochmals genauer auf die Problematik der Datenübertragung anhand eines modernen Übertragungssystems eingegangen. Den Schluß dieser Arbeit bilden dann die Simulationen, in denen Wavelet-basierte Funktionensysteme an konkreten Fallbeispielen getestet werden.

Kapitel 2

Basen in Hilberträumen

Ziel der Datenübertragung ist es, Information über einen Nachrichtenkanal zu übermitteln. Unter Information versteht man meist Bits und Bytes und ein Kanal stellt für einen Nachrichtentechniker meist ein Kabel oder Funkwellen dar. Für die mathematischen Beschreibung sind jedoch einige Abstraktionen nötig. So wird die Information als quadratisch summierbare Folge eines Körpers und der Kanal als Operator auf einem (unendlichdimensionalen) separablen Hilbertraum \mathcal{H} , der durch die Menge der möglichen Signale gebildet wird, modelliert. In der Praxis wird immer nur eine endliche Menge von Information übertragen, z.B. ein Bild oder eine E-Mail. Es ist jedoch sinnvoll, die Übertragung als einen zeitlich unendlich langen Vorgang darzustellen, in dessen Verlauf auch unendlich viel Information übertragen werden kann. Als Restriktion wirkt dabei nur die zum Übertragen verfügbare Energie. Daher wählt man den $l^2(\mathbb{Z})$ als Informationsraum, den Raum aller Folgen mit endlicher Energie. Dabei bezeichnet \mathbb{Z} die benutzte Indexmenge. Als Körper wird i.a. bei reellen Funktionen \mathbb{R} und bei komplexen Funktionen \mathbb{C} benutzt.

Die hier vorgestellten Ergebnisse gelten für beliebige Elemente c aus $l^2(\mathbb{Z})$, erst in späteren Kapiteln wird an einigen Stellen von diesem Schema abgewichen. Viele Rechnungen werden einfacher, wenn man sich auf den Teilraum $l_0(\mathbb{Z})$ von $l^2(\mathbb{Z})$ der Folgen, die nur eine endliche Anzahl von Null verschiedenen Elementen besitzen, beschränkt. Dies ist keine große Einschränkung für die realen Systeme, die ja zwangsläufig zu einem gewissen Zeitpunkt zum ersten Mal eingeschaltet und aller Wahrscheinlichkeit nach nicht ewig in Betrieb bleiben werden. Dieser ausgeschaltete Zustand entspricht dem Senden von Nullen, so daß er sich gut in das Konzept einfügt.

Im folgenden werden nun Operatoren untersucht, die Elemente aus dem Informationsraum $l^2(\mathbb{Z})$ in den Signalraum \mathcal{H} abbilden und umgekehrt aus einem Signal aus \mathcal{H} wieder Information aus $l^2(\mathbb{Z})$ erzeugen. Das Augenmerk ist dabei insbesondere auf die numerische Stabilität und die Invertierbarkeit der Abbildungen gerichtet. Dieser Ansatz ist dem der Bildverarbeitung ähnlich. Während dort jedoch der Kombination Analyse/Synthese besondere Aufmerksamkeit geschenkt wird, ist es hier vielmehr die Kombination Synthese/Analyse.

Definition 2.1 Sei $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Teilmenge des Hilbertraumes \mathcal{H} und der Operator \mathbf{T} :

$l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{H}$ definiert durch

$$\mathbf{T}c := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k.$$

Ist \mathbf{T} linear, beschränkt und die Konvergenz in der Summe unabhängig von der Summationsreihenfolge, so nennt man \mathbf{T} eine Syntheseabbildung. Der adjungierte Operator $\mathbf{T}^* : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ heißt dann Analyseabbildung von $\{e_k\}$.

Diese Operatoren sind die Grundlage der Datenübertragung. Ihre Eigenschaften werden offensichtlich durch die Menge $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ festgelegt. Bevor jedoch diese Menge untersucht wird, wird noch eine analytisch geschlossene Darstellung des Analyseoperators angegeben, die für die Implementierung an Rechnern herangezogen werden kann. Zur Notation:

Lemma 2.2 Sei $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Teilmenge des Hilbertraumes \mathcal{H} . Sei $\mathbf{D} : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ definiert durch $\mathbf{D}h := (\langle h, e_k \rangle_{\mathcal{H}})_{k \in \mathbb{Z}}$, $h \in \mathcal{H}$. Dann gilt:

- Ist \mathbf{D} linear und beschränkt, so besitzt $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Syntheseabbildung \mathbf{T} und es gilt $\mathbf{T}^* = \mathbf{D}$.
- Besitzt $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Syntheseabbildung \mathbf{T} so gilt $\mathbf{T}^*h = (\langle h, e_k \rangle_{\mathcal{H}})_{k \in \mathbb{Z}}$.

Beweis: Dieser Beweis basiert auf [12, Seiten 57, 101]. Seien $c \in l^2(\mathbb{Z})$ und $f \in \mathcal{H}$ beliebig. Jetzt und im folgenden wird für Elemente des $l^2(\mathbb{Z})$ immer die euklidische Norm benutzt, d.h. $\|c\| := \langle c, c \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \bar{c}_k$. Die Norm und das Skalarprodukt des Hilbertraumes \mathcal{H} werden mit dem Index \mathcal{H} versehen, um eine bessere Lesbarkeit zu gewährleisten. Es gilt

$$\langle \mathbf{D}^*c, f \rangle_{\mathcal{H}} = \langle c, \mathbf{D}f \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \langle e_k, f \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (2.1)$$

also ist im schwachen $L^2(\mathbb{R})$ -Sinn

$$\mathbf{D}^*c = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k. \quad (2.2)$$

\mathbf{D}^* ist wegen $\sup_{c \in l^2(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbf{D}c\|_{\mathcal{H}}}{\|c\|} =: \|\mathbf{D}\| = \|\mathbf{D}^*\|$ ebenfalls beschränkt und somit eine Syntheseabbildung. Ist andererseits \mathbf{T} eine Syntheseabbildung, so folgt aus (2.1) und (2.2), daß

$$\langle \mathbf{T}c, h \rangle_{\mathcal{H}} = \langle c, (\langle h, e_k \rangle_{\mathcal{H}})_{k \in \mathbb{Z}} \rangle \quad \forall c \in l^2(\mathbb{Z}), \forall h \in \mathcal{H} \quad (2.3)$$

gilt, also sind beide Behauptungen wahr. \square

Über den Syntheseoperator \mathbf{T} läßt sich lineare Unabhängigkeit für unendlichdimensionale Vektorräume definieren:

Definition 2.3 Sei $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Teilmenge des separablen Hilbertraumes \mathcal{H} . Dann heißt $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ genau dann linear unabhängig, wenn sie einen injektiven Syntheseoperator besitzt.

Dabei ist zu beachten, daß sich Eigenschaften linear unabhängiger Mengen endlich-dimensionaler Räume nicht automatisch auf unendlich-dimensionale Räume übertragen.

2.1 Frames

Das Augenmerk sei nun nach dieser Einführung auf die numerische Stabilität gerichtet. h sei ein gesendetes Signal aus dem Signalraum \mathcal{H} . Dieses Signal wird nun durch den Kanal, physikalische Phänomene und ungenaue Meßinstrumente verändert. Es ist offensichtlich, daß Analyseoperatoren, bei denen bereits kleine Änderungen des Signals h zu großen Änderungen in den empfangenen Koeffizienten $c \in l^2(\mathbb{Z})$ führen, unter diesen Umständen für praktische Anwendungen untauglich sind.

Sei nun $\tilde{h} \in \mathcal{H}$ eine fehlerbehaftete Version von h , dem zu analysierenden Signal. Dann soll der relative Fehler von \tilde{h} unter der Abbildung \mathbf{T}^* durch den relativen Fehler von h beschränkt sein, d.h. es existiert ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\frac{\|\mathbf{T}^*(h - \tilde{h})\|}{\|\mathbf{T}^*h\|} \leq r \frac{\|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{H}}}{\|h\|_{\mathcal{H}}} \quad \forall h, \tilde{h} \in \mathcal{H} \setminus \{0\}. \quad (2.4)$$

Das bedeutet, daß der Operator \mathbf{T}^* eine endliche (relative) Konditionszahl $\kappa(\mathbf{T}^*)$ besitzt, die hier in Anlehnung an die Kondition numerischer Probleme [14, Seite 31] definiert wird:

$$\kappa(\mathbf{T}^*) := \inf \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \frac{\|\mathbf{T}^*(h - \tilde{h})\|}{\|\mathbf{T}^*h\|} \leq r \frac{\|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{H}}}{\|h\|_{\mathcal{H}}} \quad \forall h, \tilde{h} \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \right\}.$$

Liegt die Konditionszahl $\kappa(\mathbf{T}^*)$ „nahe“ bei eins, so ist gesichert, daß es bei kleinen Abweichungen des empfangenen Signals nicht zu großen Abweichungen bei den Empfangskoeffizienten kommt.

Des weiteren folgt automatisch die Injektivität von \mathbf{T}^* , da sonst ein $h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ existieren würde mit $\mathbf{T}^*h = 0$ und so Gleichung (2.4) für kein $r < \infty$ erfüllt wäre. Daraus folgt notwendig die Existenz einer Linksinversen \mathbf{L} von \mathbf{T}^* , die auf dem Bild von \mathbf{T}^* definiert ist, und die Surjektivität von \mathbf{T} . Wäre nämlich \mathbf{T} nicht surjektiv, so gäbe es ein Element $h \in \text{Im}(\mathbf{T})^\perp \setminus \{0\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}c, h \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle c, \mathbf{T}^*h \rangle = 0 \quad \forall c \in l^2(\mathbb{Z}) \\ \Rightarrow \quad \mathbf{T}^*h &= 0, \end{aligned}$$

also ein Widerspruch zu der Injektivität von \mathbf{T}^* . Durch einfache Umformungen und Substitution läßt sich Gleichung (2.4) auch so

$$\frac{\|\mathbf{T}^*(\tilde{h})\|}{\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}} \cdot \frac{\|h\|_{\mathcal{H}}}{\|\mathbf{T}^*h\|} \leq \kappa(\mathbf{T}^*) \quad \forall h, \tilde{h} \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$$

schreiben. Durch Supremumbildung über h und \tilde{h} erhält man eine andere bekannte Gleichung $1 = \|\mathbf{Id}\| = \|\mathbf{T}^*\mathbf{L}\| \leq \|\mathbf{T}^*\| \cdot \|\mathbf{L}\| = \kappa(\mathbf{T}^*)$ und

$$\frac{\|\mathbf{T}^*\tilde{h}\|}{\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}} \leq \|\mathbf{T}^*\| \quad \forall \tilde{h} \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\|h\|_{\mathcal{H}}}{\|\mathbf{T}^*h\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{T}^*)}{\|\mathbf{T}^*\|} \quad \forall h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

Setzt man nun $A := (\frac{\|\mathbf{T}^*\|}{\kappa(\mathbf{T}^*)})^2$ und $B := \|\mathbf{T}^*\|^2$, so kann man die Gleichungen (2.5) und (2.6) zusammenfassen zu einer äquivalenten Bedingung für numerische Stabilität:

$$A\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\mathbf{T}^*h\|^2 \leq B\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}.$$

So gewappnet können Frames definiert werden.

Definition 2.4 Sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Folge im Hilbertraum \mathcal{H} . Die Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt *Frame* mit *Frame-Schranken* $A, B > 0$ genau dann, wenn sie eine Analyseabbildung besitzt, die der Gleichung

$$A\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\mathbf{T}^*h\|^2 \leq B\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall h \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \quad (2.7)$$

genügt. Ein Frame heißt genau dann *fest (tight)*, wenn $A = B$ gilt. Die Frame-Schranken werden *scharf* genannt, wenn die Ungleichungen in Ungleichung (2.7) scharf sind. Ein Frame $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt genau dann *exakt*, wenn man kein Element aus der Menge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ohne Verlust der Frame-Eigenschaft entfernen kann.

Frames wurden zum ersten Mal 1952 von Duffin und Schaefer [15] eingeführt, als sie untersuchten, unter welchen Bedingungen ein Vektor h aus einem Hilbertraum \mathcal{H} mittels seiner Skalarprodukte mit einer Familie von Vektoren $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ rekonstruiert werden kann. Im weiteren werden wir außerdem noch den sogenannten Frameoperator benötigen:

Definition 2.5 Seien \mathbf{T} und \mathbf{T}^* die Synthese- und Analyseoperatoren eines Frames $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Dann heißt die Abbildung $\mathbf{S} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\mathbf{S} := \mathbf{T}\mathbf{T}^*$ zu $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ assoziierter Frameoperator.

Anders geschrieben bedeutet das

$$\mathbf{S}h = \mathbf{T}\mathbf{T}^*h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle h, f_k \rangle_{\mathcal{H}} f_k \quad \forall h \in \mathcal{H}. \quad (2.8)$$

Falls $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis bildet, ist \mathbf{S} offenbar die Identitätsabbildung auf \mathcal{H} . \mathbf{S} wird erst bei der Invertierung von \mathbf{T} im allgemeinen Fall eine wichtige Rolle spielen. Um Unklarheiten zu vermeiden, sei noch darauf hingewiesen, daß in der Literatur zum Teil auch der Analyseoperator \mathbf{T}^* Frameoperator genannt wurde [12].

Hier noch ein Lemma, daß die oben erarbeiteten notwendigen Eigenschaften eines Frames zusammenfaßt:

Lemma 2.6 Sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$ ein Frame mit Frameschranken $A, B \in \mathbb{R}^+$, Syntheseoperator \mathbf{T} und Analyseoperator \mathbf{T}^* . Dann gilt:

- \mathbf{T} ist surjektiv, folglich gilt $\overline{\text{span}\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}} = \mathcal{H}$.
- \mathbf{T}^* ist injektiv und besitzt folglich eine Linksinverse.

2.2 Riesz-Basen

Es steht nun fest, unter welchen Bedingungen der Analyseoperator stabil ist. Auf ähnliche Weise lassen sich Bedingungen für die Stabilität des Syntheseoperators herleiten. \mathbf{T} ist genau dann numerisch stabil, wenn ein $r \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$\frac{\|\mathbf{T}(c - \tilde{c})\|_{\mathcal{H}}}{\|\mathbf{T}c\|_{\mathcal{H}}} \leq r \frac{\|c - \tilde{c}\|}{\|c\|} \quad \forall c, \tilde{c} \in l^2(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}. \quad (2.9)$$

Das minimale r , für das Gleichung (2.9) erfüllt ist, bestimmt sich wieder durch $\kappa(\mathbf{T})$. Wie oben folgt auch hier die Injektivität von \mathbf{T} und damit automatisch die lineare Unabhängigkeit der mit \mathbf{T} assoziierten Folge $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Analog zeigt man, daß die Gleichung (2.9) genau dann erfüllt ist, wenn ein $A := (\|\mathbf{T}\|/\kappa(\mathbf{T}))^2 > 0$ und ein $B := \|\mathbf{T}\|^2$ existieren, so daß $A\|c\|^2 \leq \|\mathbf{T}c\|^2 \leq B\|c\|^2 \quad \forall c \in l^2(\mathbb{Z})$ erfüllt ist. Daraus ergibt sich:

Definition 2.7 Sei $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Teilmenge eines Hilbertraumes \mathcal{H} . Gilt $\overline{\text{span}\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}} = \mathcal{H}$, so heißt $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ Riesz-Basis genau dann, wenn zwei Zahlen $A, B > 0$ existieren, so daß

$$A\|c\|^2 \leq \|\mathbf{T}c\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B\|c\|^2 \quad \forall c \in l^2(\mathbb{Z}) \quad (2.10)$$

gilt [28, Seite 104f].

Bemerkung 2.8 Man beachte, daß aus Lemma 2.6 folgt, daß jede Teilmenge $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eines Hilbertraumes \mathcal{H} mit assoziierten Synthese- und Analyseoperatoren \mathbf{T} und \mathbf{T}^* , die den Ungleichungen (2.7) und (2.10) für jeweils verschiedene Konstanten genügen, eine Riesz-Basis bildet.

Anders ausgedrückt bedeutet das, daß jeder Frame mit (2.10) eine Riesz-Basis bildet.

Wie bereits erwähnt, besitzt der Analyseoperator eines Frames eine Linksinverse. Frames sind insbesondere deshalb so nützlich, weil diese Linksinverse selbst einen Syntheseoperator eines anderen Frames bildet [29, Seite 129]:

Satz 2.9 Sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Frame mit Frameschranken A und B . Sei $\tilde{f}_k := \mathbf{S}^{-1}f_k$. Dann existiert der zu $\{\tilde{f}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ assoziierte Syntheseoperator $\tilde{\mathbf{T}} := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}$ und es gilt für alle $h \in \mathcal{H}$

$$\frac{1}{B}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\tilde{\mathbf{T}}^*h\|^2 \leq \frac{1}{A}\|h\|_{\mathcal{H}}^2,$$

und

$$h = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T})\mathbf{T}^*h = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{T}^*h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle h, f_k \rangle_{\mathcal{H}} \tilde{f}_k, \quad (2.11)$$

$$h = \mathbf{T}(\mathbf{T}^*\mathbf{S}^{-1})h = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{T}}^*h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle h, \tilde{f}_k \rangle_{\mathcal{H}} f_k. \quad (2.12)$$

Ist der Frame fest, so folgt $\tilde{f}_k = \frac{1}{A}f_k$, d.h. $\mathbf{S}h = Ah$.

Jeder Frame, der den Gleichungen (2.12) und (2.12) genügt heißt dual zu $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Es gibt im allgemeinen mehr als einen solchen dualen Frame, da die Linksinverse des Analyseoperators in vielen Fällen nicht eindeutig definiert ist. Jedoch ist die l^2 -Norm der Koeffizienten nur in dem in Satz 2.9 kanonisch konstruierten dualen Frame minimal. Wenn im weiteren von „dem“ dualen Frame gesprochen wird, ist immer dieser Frame mit minimalen l^2 -Koeffizienten gemeint.

Lemma 2.10 *Sei \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum. Dann ist $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ genau dann eine Riesz-Basis, wenn $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ein exakter Frame ist.*

Beweis: Die Aussage folgt schnell aus der Bijektivität und Beschränktheit der Analyse- und Syntheseoperatoren, die die Existenz einer Inversen implizieren, und der Normgleichheit $\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{T}^*\|$ [8, Seite 233]. \square

Da nach obigem Lemma eine Riesz-Basis $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ebenfalls Frame ist, folgt auch die Existenz eines dualen Frames $\{\tilde{r}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Das folgende Lemma zeigt eine wichtige Eigenschaft von Riesz-Basen und ihren dualen Frames:

Lemma 2.11 *Ist $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Riesz-Basis eines Hilbertraumes \mathcal{H} , so ist der duale Frame $\{\tilde{r}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ebenfalls eine Riesz-Basis und es gilt die folgende Biorthogonalitätsbedingung:*

$$\langle r_{k'}, \tilde{r}_k \rangle = \delta_{k',k}. \quad (2.13)$$

Beweis: Die Operatoren \mathbf{T} und \mathbf{T}^* sind beschränkte, bijektive Abbildungen und somit ist auch $\mathbf{S}^{-1} = (\mathbf{T}\mathbf{T}^*)^{-1}$ beschränkt und bijektiv. Also sind auch $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}$ und $\tilde{\mathbf{T}}^* = \mathbf{T}^*\mathbf{S}^{-1}$ beschränkt und bijektiv und besitzen nach dem Satz der offenen Abbildung ebenfalls beschränkte und bijektive Inverse. Seien nun noch A und B die Frameschranken von $\{\tilde{r}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Es gilt also

$$\|\tilde{\mathbf{T}}\|^2 = \|\tilde{\mathbf{T}}^*\|^2 \leq B$$

und

$$\|\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\|^2 = \|(\tilde{\mathbf{T}}^{-1})^*\|^2 = \|(\tilde{\mathbf{T}}^*)^{-1}\|^2 \leq \frac{1}{A},$$

also ist $\{\tilde{r}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Riesz-Basis [8, Seite 168].

Ersetzt man in Gleichung (2.12) h durch $r_{k'}$, so erhält man

$$r_{k'} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle r_{k'}, \tilde{r}_k \rangle_{\mathcal{H}} r_k = \mathbf{T}(\langle r_{k'}, \tilde{r}_k \rangle_{\mathcal{H}})_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Aus der Bijektivität von \mathbf{T} folgt sofort $\langle r_{k'}, \tilde{r}_k \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{k',k}$ und somit die zweite Behauptung. \square

Der letzte Satz dieses Kapitels stellt nun den Zusammenhang zwischen Riesz-Basen und Orthonormalbasen her. Erstere sind nämlich „verzerrte“ Orthonormalbasen und es läßt sich jede Riesz-Basis kanonisch auf eine Orthonormalbasis abbilden.

Satz 2.12 *Sei $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Riesz-Basis eines Hilbertraumes \mathcal{H} mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert die Wurzel der Inversen des Frameoperators und $\{\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ist eine Orthonormalbasis.*

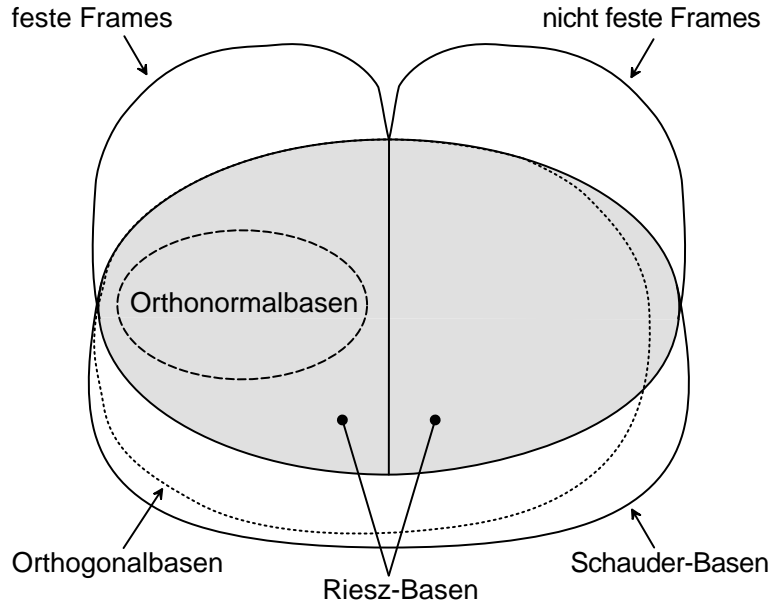


Abbildung 2.1: Dieses Diagramm gibt Aufschluß über die Beziehungen zwischen Frames, Schauder-, Riesz-, orthogonalen und orthonormalen Basen eines separablen Hilbertraumes [21].

Beweis: Man beachte, daß die Menge der beschränkten Operatoren auf \mathcal{H} eine C^* -Algebra bildet. Der Frameoperator \mathbf{S} ist offenbar selbstadjungiert, linear und beschränkt, da \mathbf{T} und \mathbf{T}^* beschränkt und linear sind. Nun gilt

$$\langle \mathbf{S}h, h \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{T}\mathbf{T}^*h, h \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{T}^*h, \mathbf{T}^*h \rangle = \|\mathbf{T}^*h\|^2 > 0 \quad \forall h \in \mathcal{H} \setminus \{0\},$$

also ist \mathbf{S} positiv. Für $\mathbf{S}^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{T}}^*$ gilt natürlich dasselbe. Dann besitzen \mathbf{S} und \mathbf{S}^{-1} lineare, beschränkte und selbstadjungierte Wurzeln $\mathbf{S}^{\frac{1}{2}}$ und $(\mathbf{S}^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ [8, Seite 241f]. Aus $(\mathbf{S}^{\frac{1}{2}})^{-1}(\mathbf{S}^{\frac{1}{2}})^{-1} = (\mathbf{S}^{\frac{1}{2}})^{-1}(\mathbf{S}^{\frac{1}{2}})^{-1}\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}$ folgt $(\mathbf{S}^{\frac{1}{2}})^{-1} = (\mathbf{S}^{-1})^{\frac{1}{2}} =: \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}$. $\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}$ ist also eindeutig definiert und offenbar eine bijektive Abbildung. Zusammen mit

$$\left\langle \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}r_k, \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}r_{k'} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}r_k, r_{k'} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \mathbf{S}^{-1}r_k, r_{k'} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{k,k'}$$

folgt, daß $\{\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis ist. \square

Riesz-Basen sind also numerisch stabil und somit gut geeignet für die Datenübertragung. Ist die Riesz-Basis bekannt, läßt sich auf einfache Weise der Syntheseoperator konstruieren. Für die Berechnung des Analyseoperators ist aber die Kenntnis der dualen Riesz-Basis notwendig. Diese läßt sich durch Iterationsverfahren approximativ berechnen [35], jedoch muß i.a. jede duale Funktion einzeln berechnet werden. Die unendliche Anzahl von Funktionen verbietet daher dieses Verfahren in der Praxis. In den nächsten beiden Kapiteln werden daher Familien von Riesz-Basen vorgestellt, deren Eigenschaften die Berechnung der dualen Frames erleichtern.

Kapitel 3

Kohärente Systeme

In diesem Kapitel werden nun die Ergebnisse des letzten Kapitels auf den $L^2(\mathbb{R})$ und seine Teilräume angewandt. Es werden verschiedene Riesz-Basen mit „Struktur“ vorgestellt, die im weiteren Verlauf der Arbeit zur Datenübertragung benutzt werden. Struktur bedeutet in diesem Fall, daß die Riesz-Basen aus wenigen Grundfunktionen durch Anwenden von unitären Operatoren erzeugt werden. Den Weyl-Heisenberg-Systemen wird die Verkettung von Translation und Modulation, den Wavelets die Verkettung von Dilatation und Translation zugrunde liegen. Dieses Vorgehen ermöglicht es, auf dieser Gruppenstruktur aufbauende „schnelle“ Algorithmen zu konstruieren. Insbesondere wird es nicht mehr nötig sein, jede einzelne Funktion des dualen Systems zu berechnen.

3.1 Translationsinvariante Systeme

Beiden oben genannten Systemen liegt, neben einem jeweils anderen Operator, der Translationsoperator zugrunde. Systeme, die durch Translation einer Grundmenge von Funktionen erzeugt werden, heißen translationsinvariant (bezüglich der verwendeten Translationskonstanten). Theoretisch sind kompliziertere Schemata möglich; für die in dieser Arbeit betrachteten Systeme genügt folgende Definition:

Definition 3.1 Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dann sei der Translationsoperator \mathbf{E}^α definiert durch $\mathbf{E}^\alpha : f \mapsto f(\cdot - \alpha)$. $X \subset L^2(\mathbb{R})$ heißt translationsinvariant, falls

$$\mathbf{E}^{lL} f \in X \quad \forall f \in X, \forall l \in \mathbb{Z}$$

für ein (minimales) $L > 0$ gilt. Dabei heißt L die Translationskonstante von X [33].

So läßt sich aus einer Riesz-Basis Φ für den $L^2([0, 1])$ eine Basis für den $L^2(\mathbb{R})$ konstruieren, indem man die Basis Φ kanonisch in den $L^2(\mathbb{R})$ einbettet und alle ganzzahligen Translate bildet. Damit ist dann $\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}^l \Phi$ eine Riesz-Basis des $L^2(\mathbb{R})$.

Durch diese Vorgehensweise erhält man für viele interessante Unterräume des $L^2(\mathbb{R})$ Basen, die nur noch aus einer endlichen Menge von Generatorfunktionen erzeugt werden.

Es ist wichtig, daß die Menge der Generatorfunktionen endlich ist, da sich Systeme mit einer unendlichen Grundmenge i.a. nicht implementieren lassen.

Interessant sind die translationsinvarianten Systeme vor allem wegen der folgenden wichtigen Eigenschaft:

Lemma 3.2 *Sei I eine Indexmenge und $F := \{f_{k,l}\}_{(k,l) \in I \times \mathbb{Z}}$ ein translationsinvarianter Frame mit Translationsgitterkonstante L . Dann ist der duale Frame \tilde{F} ebenfalls translationsinvariant und wird gebildet durch*

$$\tilde{F} = \{\mathbf{E}^{lL} \mathbf{S}^{-1} f_{k,0} \mid k \in I, l \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus der Tatsache, daß \mathbf{E}^α und der Frameoperator \mathbf{S} kommutieren und somit auch \mathbf{E}^α und \mathbf{S}^{-1} [33, Seite 1057]. \square

Nun läßt sich der ganze $L^2(\mathbb{R})$ nicht durch diskrete Translationen einer endlichen Grundmenge aufspannen. Es werden also noch Verfahren benötigt, um aus einer endlichen Menge, im Idealfall aus einer einzigen Funktion bestehend, ein Generatorsystem zu erzeugen, dessen Translate ein Frame oder eine Riesz-Basis für den $L^2(\mathbb{R})$ bilden.

3.2 Weyl-Heisenberg-Systeme

Wie am Anfang des Kapitels erwähnt, bildet die Verkettung von Modulation und Translation eine Gruppe. Diese Eigenschaft läßt sich gut ausnutzen, um eine interessante Familie von Funktionensystemen zu konstruieren.

Sei für einen Moment $\Phi := \{\chi_{[0,1)} e^{-2\pi i \xi \cdot}\}_{\xi \in \mathbb{R}}$, dann bildet Φ wegen der Orthonormalität der trigonometrischen Polynome eine Orthonormalbasis für den $L^2([0,1))$. Alle ganzzahligen Translate von Φ bilden dann offenbar eine Orthonormalbasis, also auch eine Riesz-Basis, für den $L^2(\mathbb{R})$, die durch Modulation und Translation der einen Generatorfunktion $\chi_{[0,1)}$ erzeugt wird. Verallgemeinert man dieses Prinzip, so erhält man die Weyl-Heisenberg-Systeme:

Definition 3.3 *Sei \mathbf{M}^α der Modulationsoperator, d.h.*

$$\mathbf{M}^\alpha : f \mapsto e_\alpha f, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

dabei ist e_α die Exponentialfunktion $e_\alpha : \xi \mapsto e^{2\pi i \alpha \xi}, \xi \in \mathbb{C}$. Sei Φ eine Teilmenge von $L^2(\mathbb{R})$ und $K, L > 0$, dann heißt

$$X = X(\varphi, K, L) := \{\mathbf{E}^l \mathbf{M}^k \varphi \mid \varphi \in \Phi, k \in K\mathbb{Z}, l \in L\mathbb{Z}\}$$

das von Φ generierte Weyl-Heisenberg-System. Gilt $\|\varphi\| = 1$ für alle $\varphi \in \Phi$, so heißt X normalisiert und es gilt $\|f\| = 1$ für alle $f \in X$.

Bei den hier betrachteten Anwendungen wird die Menge der Generatorfunktionen Φ nur aus einer Funktion, einer sogenannten Fensterfunktion, bestehen.

Bemerkung 3.4 Wählt man die Parameter l und k nicht diskret sondern kontinuierlich, und wählt man eine Fensterfunktion φ , so erhält man die kontinuierliche gefensterter Fouriertransformation:

$$\mathbf{F}_\varphi f(x, \xi) := \langle f, \mathbf{E}^x \mathbf{M}^\xi \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t - x) e^{-2\pi i \xi t} dt, \quad x, \xi \in \mathbb{R}, f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Existiert dann eine Funktion $\tilde{\varphi}$, für die $\langle \varphi, \tilde{\varphi} \rangle = 1$ gilt, so ist die gefensterter Fouriertransformation (im schwachen L^2 -Sinn) invertierbar durch:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_\varphi f(x, \xi) \tilde{\varphi}(t - x) e^{2\pi i \xi t} d\xi dx.$$

Üblicherweise wählt man eine reelle, symmetrische und normierte Fensterfunktion $\varphi = \tilde{\varphi}$. Vor diesem Hintergrund kann bei gegebenem Weyl-Heisenberg-Frame sein Analyseoperator als Zeit-Frequenz-Abtastung der assoziierten gefensterter Fouriertransformation angesehen werden.

Beweis: Dieser Beweis basiert auf [29, Seite 73]. Sei $f_\xi(x) := \mathbf{F}_\varphi f(x, \xi)$ und $\bar{\varphi}_\xi(x) := \varphi(-x) e^{2\pi i \xi x}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_\xi(x) = \mathbf{F}_\varphi f(x, \xi) &= e^{-2\pi i x \xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t - x) e^{2\pi i \xi (x - t)} dt \\ &= e^{-2\pi i x \xi} (f * \bar{\varphi}_\xi)(x) \end{aligned}$$

und somit

$$\hat{f}_\xi(\omega) = \hat{f}(\omega + \xi) \hat{\bar{\varphi}}_\xi(\omega + \xi) = \hat{f}(\omega + \xi) \hat{\varphi}(-\omega).$$

Mit Benutzung der Parsevalschen Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_\varphi f(x, \xi) \tilde{\varphi}(t - x) e^{2\pi i \xi t} dx d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f_\xi(x)) (\tilde{\varphi}(t - x) e^{2\pi i \xi t}) dx d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(\omega + \xi) \hat{\varphi}(-\omega)) (\tilde{\varphi}(-\omega) e^{-2\pi i t \omega} e^{2\pi i \xi t}) d\omega d\xi \end{aligned}$$

Ist $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, so erlaubt es der Satz von Fubini, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen. Sollte dies nicht der Fall sein, muß ein Dichteargument ($L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^2(\mathbb{R})$) benutzt werden, um die Aussage zu beweisen. Somit folgt

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{\varphi} f(x, \xi) \tilde{\varphi}(t-x) e^{2\pi i \xi t} dx d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + \xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi e^{-2\pi i t \omega} \hat{\varphi}(-\omega) \tilde{\hat{\varphi}}(-\omega) d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} e^{-2\pi i t \omega} \hat{\varphi}(-\omega) \tilde{\hat{\varphi}}(-\omega) d\omega \\
&= f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-2\pi i \omega t} \hat{\varphi}(-\omega) \right) \left(e^{-2\pi i \omega t} \tilde{\hat{\varphi}}(-\omega) \right) d\omega \\
&= f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-x) \tilde{\varphi}(t-x) dx = f(t) \langle \varphi, \tilde{\varphi} \rangle = f(t).
\end{aligned}$$

□

Offenbar enthält die kontinuierliche gefensterete Fouriertransformation mehr Information als zur Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion notwendig ist. Im weiteren wird daher diskutiert, welche Anforderungen an die Fensterfunktion φ und die Gitterkonstanten K und L gestellt werden müssen, damit das Weyl-Heisenberg-System X ein Frame (eine Riesz-Basis) ist und somit über einen invertierbaren Analyseoperator (und einen invertierbaren Syntheseoperator) verfügt.

Das Produkt der Gitterkonstanten K und L gibt Aufschluß über die „Dichte“ der Abtastung der kontinuierlichen gefenstereten Fouriertransformation. Ohne Kenntnis der Fensterfunktion können schon die folgenden notwendigen Bedingungen formuliert werden:

Lemma 3.5 *Sei $X(\varphi, K, L)$ ein Weyl-Heisenberg-System. Dann gilt [17, Seite 13]:*

- Ist X ein Frame, so gilt $KL \leq 1$.
- Ist X eine Riesz-Basis, so gilt $KL = 1$.
- Ist X ein Frame und gilt $KL = 1$, so ist X eine Riesz-Basis.
- Ist X ein Frame für einen echten Teilraum des $L^2(\mathbb{R})$, so gilt $KL > 1$.

Mit diesem Lemma kann man die Weyl-Heisenberg-Systeme in drei große Gruppen mit unterschiedlichen Eigenschaften einteilen. In Anlehnung an die in Bemerkung 3.4 eingeführte Analogie ergibt sich:

- Überabgetastet ($LK < 1$): Es existieren Weyl-Heisenberg-Frames mit guter Zeit-Frequenz-Lokalisation.
- Kritisch abgetastet ($LK = 1$): Es existieren Weyl-Heisenberg-Orthonormal- und Weyl-Heisenberg-Riesz-Basen.
- Unterabgetastet ($LK > 1$): Der Abschluß des Erzeugnisses des Weyl-Heisenberg-Systems ist eine echte Teilmenge des $L^2(\mathbb{R})$ [34, Corollary 2.7].

Aus dem Satz von Balian-Low folgt, daß jede Weyl-Heisenberg-Riesz-Basis, die ganz $L^2(\mathbb{R})$ aufspannt, schlecht in der Zeit-Frequenz-Ebene lokalisiert ist [17, Seite 88]:

Satz 3.6 *Sei $X(\varphi, K, L)$ ein Weyl-Heisenberg-System mit $KL = 1$. Ist X eine Riesz-Basis, so gilt*

$$\|t\varphi(t)\|_2 \|\xi\hat{\varphi}(\xi)\|_2 = \infty.$$

In der Bildverarbeitung ist man auf die gesamte im Bild vorhandene Information und zugleich auf gute Zeit-Frequenz-Lokalisation des Analyse-Frames angewiesen. Deshalb benutzt man dort meist überabgetastete Systeme. Im Gegensatz dazu werden in der Datenübertragung meist unterabgetastete Systeme verwendet. Auch hier ist eine gute Zeit-Frequenz-Lokalisation wichtig, die Vollständigkeit hingegen ist zwar erwünscht, aber nicht zwingend erforderlich. Überabgetastete Systeme kommen natürlich nicht in Frage, da ihr Syntheseoperator nicht invertierbar ist.

Obwohl keine gut lokalisierten Weyl-Heisenberg-Riesz-Basen des ganzen $L^2(\mathbb{R})$ existieren, lassen sich Basen konstruieren, die „fast“ $L^2(\mathbb{R})$ aufspannen. Je näher sich das Produkt von Translations- und Modulationsgitterkonstante dieser Basen der 1 nähert, desto kleiner ist der nicht aufgespannte Teilraum.

Es gibt im Vergleich zu folgendem Satz einfachere hinreichende Bedingungen für die Frame-Eigenschaft von speziellen Weyl-Heisenberg-Systemen. Die folgende Bedingung für die Frame-Eigenschaft eines Weyl-Heisenberg-Systems von Casazza und Christensen ist jedoch allgemein anwendbar. Bedingungen, die für die Praxis größere Bedeutung besitzen, werden in Kapitel 4 vorgestellt.

Satz 3.7 *Sei $L^2(\mathbb{R} \setminus N_G)$ die Menge aller Funktionen aus $L^2(\mathbb{R})$, die auf N_G verschwinden. Seien außerdem $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, $K, L > 0$ und*

$$A := \inf_{x \in [0, L] \setminus N_G} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(x - nL)|^2 - \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x - nL) \overline{\varphi(x - nL - \frac{m}{K})} \right| \right] > 0$$

$$B := \sup_{x \in [0, L]} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x - nL) \overline{\varphi(x - nL - \frac{m}{K})} \right| < \infty.$$

Dann ist $\{\mathbf{E}^l \mathbf{M}^k \varphi\}_{(k,l) \in K\mathbb{Z} \times L\mathbb{Z}}$ ein Frame für $L^2(\mathbb{R} \setminus N_G)$ mit Frameschranken $\frac{A}{K}, \frac{B}{K}$ [4].

Sei nun X ein Weyl-Heisenberg-Frame für (einen Teilraum von) $L^2(\mathbb{R})$. Da nicht nur der Translationsoperator \mathbf{E}^α , sondern auch der Modulationsoperator \mathbf{M}^α mit dem Frameoperator \mathbf{S} kommutieren [17, Seite 12], folgt:

Lemma 3.8 *Sei $X(\varphi, K, L)$ ein Weyl-Heisenberg-Frame. Dann ist*

$$\tilde{X} := \tilde{X}(\mathbf{S}^{-1}\varphi, K, L) = \{\mathbf{E}^l \mathbf{M}^k \mathbf{S}^{-1}\varphi \mid k \in K\mathbb{Z}, l \in L\mathbb{Z}\}$$

der assoziierte duale Frame und ebenfalls ein Weyl-Heisenberg-Frame.

D.h. der duale Frame hat dieselbe Struktur wie der Ausgangsframe, also können alle Algorithmen, die für X benutzt werden, auch für \tilde{X} herangezogen werden.

3.3 Wilson-Basen

Das größte Problem der Weyl-Heisenberg-Systeme wird durch das Balian-Low-Theorem beschrieben: Es gibt keine gut lokalisierten Weyl-Heisenberg-Riesz-Basen des $L^2(\mathbb{R})$. Wilson hat 1987 vorgeschlagen, Funktionen zu benutzen, die sowohl um die positiven als auch um die negativen Frequenzen derselben Ordnung lokalisiert sind, also nur reell gut lokalisiert sind. Daubechies, Jaffard und Journé haben diese Idee weitergeführt und unter anderem die folgende Beziehung gefunden [11]:

Satz 3.9 Sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ mit

- $\hat{\varphi}$ ist reellwertig.
- $X(\varphi, 1, \frac{1}{2})$ ist ein fester Frame für $L^2(\mathbb{R})$ mit Frame-Schranken 2.

Dann ist die Menge $\{\psi_{k,l}\}_{k \geq 0, l \in \mathbb{Z}}$, definiert durch

$$\begin{aligned} \psi_{0,l}(t) &= \mathbf{M}^l \varphi(t) &&= \varphi(t-l), && \text{für } k=0 \\ \psi_{k,l}(t) &= \frac{\mathbf{M}^l \mathbf{E}^{k/2} \varphi(t) + \mathbf{M}^{-l} \mathbf{E}^{k/2} \varphi(t)}{\sqrt{2}} &&= \sqrt{2} \varphi\left(t - \frac{l}{2}\right) \cos(2\pi kt), && \text{für } k \neq 0, k+l \in 2\mathbb{Z} \\ \psi_{k,l}(t) &= \frac{i(\mathbf{M}^l \mathbf{E}^{k/2} \varphi(t) - \mathbf{M}^{-l} \mathbf{E}^{k/2} \varphi(t))}{\sqrt{2}} &&= \sqrt{2} \varphi\left(t - \frac{l}{2}\right) \sin(2\pi kt), && \text{für } k \neq 0, k+l \in 2\mathbb{Z} + 1, \end{aligned}$$

eine orthonormale Basis für den $L^2(\mathbb{R})$ [17, Seite 105]. Eine solche Basis heißt Wilson-Basis.

Es ist insbesondere möglich, gut reell lokalisierte Wilson-Basen zu erzeugen; dies reicht für viele praktische Anwendungen aus, da oft nur reelle Signale synthetisiert und analysiert werden müssen.

Es existieren allgemeinere Verfahren zur Konstruktion von Wilson-Basen, die mehr Freiheiten bei der Gestaltung erlauben. Es würde hier jedoch zu weit führen, diese Vielfalt vorzustellen, und so sei hier nur auf bspw. Bittner verwiesen, der in [2] sehr ausführlich allgemeine biorthogonale Wilson-Basen behandelt. Das eigentliche Augenmerk dieser Arbeit soll jedoch auf den in den nächsten Abschnitten eingeführten Wavelets im Vergleich zu momentan verwandten Weyl-Heisenberg-Systemen liegen.

3.4 Wavelets

Verfährt man ähnlich wie bei den Weyl-Heisenberg-Systemen und benutzt statt der Modulation die Dilatation, so erhält man die Wavelet-Transformation, eine der gefensternten Fouriertransformation ähnliche Abbildung [28, Seite 16]:

Definition 3.10 Eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, welche die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < c_\psi := \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$$

erfüllt, heißt Wavelet. Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und \mathbf{D}^α der Dilatationsoperator, definiert durch $\mathbf{D}^\alpha : f \mapsto \sqrt{|\alpha|^{-1}} f(\alpha^{-1}\cdot)$. Die Wavelet-Transformation $\mathbf{L}_\psi : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2\left(\mathbb{R}^2, \frac{dadb}{a}\right)$ zum Wavelet ψ ist dann definiert durch

$$\mathbf{L}_\psi f(a, b) := \langle f, \mathbf{D}^a \mathbf{E}^b \psi \rangle = \int_{-\infty}^\infty f(t) \mathbf{D}^a \mathbf{E}^b \psi(t) dt, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Satz 3.11 Sei ψ ein Wavelet. Dann invertiert der zu \mathbf{L}_ψ adjungierte Operator

$$\mathbf{L}_\psi^* : L^2\left(\mathbb{R}^2, \frac{dadb}{a}\right) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (3.1)$$

definiert durch

$$\mathbf{L}_\psi^* : g \mapsto \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty g(a, b) \mathbf{D}^a \mathbf{E}^b \psi \frac{dadb}{a^2},$$

die Wavelet-Transformation auf ihrem Bildbereich [28, Seite 22].

Da die kontinuierliche Wavelet-Transformation für numerische Anwendungen ungeeignet ist, wird wieder die Diskretisierung der Transformation betrachtet. Es ist daher zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Information aus der diskreten Abtastung der Transformation für die Invertierung ausreicht.

Da die Dilatationen eine multiplikative und die Translationen eine additive Gruppe bilden, tastet man, um die Gruppenstruktur ausnutzen zu können, den Dilatationsparameter a durch Potenzen einer reellen Zahl $a_0 > 1$ ab, den Translationsparameter b hingegen in gleichmäßigen Abständen $b_0 > 0$.

Es werden also Wavelets ψ und Parameter a_0 und b_0 gesucht, so daß

$$\Psi := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Psi_k := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\mathbf{D}^{a_0^k} \mathbf{E}^{lb_0} \psi \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$$

eine Riesz-Basis für $L^2(\mathbb{R})$ bildet.

Für Wavelets gibt es keine so „einfachen“ Aussagen, wie sie z.B. durch Lemma 3.5 für Weyl-Heisenberg-Systeme gegeben sind. Daubechies stellt in [12, Seite 63ff] eine notwendige und eine sehr technische hinreichende Bedingung auf, die hier der Vollständigkeit halber aufgeführt werden:

Satz 3.12 Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Falls Ψ einen Frame für $L^2(\mathbb{R})$ mit Frame-Schranken A, B bildet, so gilt

$$b_0 \ln a_0 A \leq \int_0^\infty \xi^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \leq b_0 \ln a_0 B,$$

$$b_0 \ln a_0 A \leq \int_{-\infty}^0 \xi^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \leq b_0 \ln a_0 B.$$

Man beachte, daß ψ damit automatisch auch ein Wavelet gemäß Definition 3.10 ist.

Satz 3.13 Wenn $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ und a_0 den Gleichungen

$$\inf_{1 \leq |2\pi\xi| \leq a_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 > 0, \quad (3.2)$$

$$\sup_{1 \leq |2\pi\xi| \leq a_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 < \infty \quad (3.3)$$

genügen, und $\beta(s) = \sup_{\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| |\hat{\psi}(a_0^m \xi + \frac{s}{2\pi})|$ mindestens so schnell fällt wie $(1 + |s|)^{-1+\varepsilon}$, mit $\varepsilon > 0$, dann existiert $(b_0)_{thr} > 0$, so daß Ψ für alle $b_0 < (b_0)_{thr}$ ein Frame mit Schranken

$$A = \frac{1}{b_0} \left\{ \inf_{1 \leq |2\pi\xi| \leq a_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left[\beta\left(\frac{k}{b_0}\right) \beta\left(-\frac{k}{b_0}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$B = \frac{1}{b_0} \left\{ \sup_{1 \leq |2\pi\xi| \leq a_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left[\beta\left(\frac{k}{b_0}\right) \beta\left(-\frac{k}{b_0}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

ist [12, Seite 69].

Die Bedingungen in Satz 3.13 sind beispielsweise erfüllt, wenn $|\hat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|^\alpha (\frac{1}{2\pi} + |\xi|)^{-\gamma}$, mit $C, \alpha > 0, \gamma > \alpha + 1$.

Der Satz besagt, daß Abtastparameter a_0 und b_0 mit der Eigenschaft existieren, daß Ψ einen Frame bildet, wenn ψ hinreichend „gute“ Eigenschaften besitzt, d.h. ein Wavelet im Sinne der Definition ist und im Zeit- und Frequenzbereich vernünftig abfällt. Dabei liegt a_0 i.a. nahe bei 1 und b_0 bei 0.

Problematisch bei einem Wavelet-Frame ist, daß der duale Frame, im Gegensatz zu den Weyl-Heisenberg-Systemen, nicht von einem Wavelet erzeugt werden muß.

3.5 Multi-Skalen-Analyse

In vielen Fällen möchte man aber nicht überprüfen, ob ein gegebenes System eine Wavelet-Riesz-Basis bildet. Für viele Anwendungen genügt es völlig, eine Wavelet-Riesz-Basis erzeugen zu können. Idealerweise möchte man auch Einfluß auf die Eigenschaften dieser Basis nehmen können.

Mallat hat von der Bildverarbeitung her kommend ein relativ einfaches Konzept zur Konstruktion von Wavelet-Riesz-Basen gefunden, in das die meisten seinerzeit bekannten orthonormalen Wavelet-Basen mit dyadischen Gitter (d.h. $a_0 = 2, b_0 = 1$) hineinpaßen. Das Konzept läßt sich problemlos für biorthogonale Wavelet-Basen erweitern. Es existieren allerdings auch dyadische Wavelet-Riesz-Basen, die nicht durch Mallats Multi-Skalen-Analyse konstruiert werden können [39].

Definition 3.14 Eine Folge $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ von abgeschlossenen Teilräumen des $L^2(\mathbb{R})$ heißt *Multi-Skalen-Analyse* genau dann, wenn die Bedingungen

$$V_{k+1} \subset V_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

$$f \in V_k \Leftrightarrow \mathbf{D}^2 f \in V_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} V_k = \{0\}, \quad (3.6)$$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} V_k = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} V_k = L^2(\mathbb{R}), \quad (3.7)$$

$$\exists \varphi \in V_0 \text{ mit } \Phi_0 := \{\mathbf{E}^l \varphi \mid l \in \mathbb{Z}\} \text{ ist eine Riesz-Basis von } V_0, \quad (3.8)$$

erfüllt sind.

Das φ aus (3.8) nennt man auch Skalierungsfunktion oder Vater-Wavelet im Gegensatz zu ψ , das auch Mutter-Wavelet genannt wird. Die Eigenschaft (3.6) folgt bereits aus den anderen Bedingungen, ist aber wegen ihrer Bedeutung zusätzlich angegeben worden. Man sieht sofort, daß sich mit Hilfe der V_k Funktionen auf gewissen „Skalen“ V_k approximieren lassen. Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{P}_{V_k} f\| &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow -\infty} \|f - \mathbf{P}_{V_k} f\| &= 0. \end{aligned}$$

Man kann also die orthogonale Projektion einer Funktion f in einen der Räume V_k als Approximation auf der Skala k betrachten.

Sei also eine Multi-Skalen-Analyse gegeben. Dann existiert wegen (3.8) und Satz 2.12 ein φ , dessen Translationen eine Orthonormalbasis von V_0 bildet (der Einfachheit halber werden hier zuerst nur die einfacheren Orthonormalbasen eingeführt, um später im allgemeineren Rahmen dieses Konzept auf Biorthogonalbasen zu erweitern). Aus (3.5) folgt, daß $\Phi_k := \{\mathbf{D}^{2k} \mathbf{E}^l \varphi \mid l \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis für V_k ist [29, Seite 267]. Seien nun W_k die orthogonalen Komplemente von V_k in V_{k-1} , so läßt sich $L^2(\mathbb{R})$ wie folgt für jedes $k_0 \in \mathbb{Z}$ orthogonal zerlegen:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_{k_0} + \sum_{k=-\infty}^{k_0} W_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} W_k \quad \forall k_0 \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Da $\varphi \in V_0 \subset V_{-1}$ und Φ_{-1} eine Orthonormalbasis von V_{-1} ist, kann φ in Funktionen aus Φ_{-1} zerlegt werden:

$$\varphi = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, \mathbf{D}^{2^{-1}} \mathbf{E}^l \varphi \rangle \mathbf{D}^{2^{-1}} \mathbf{E}^l \varphi. \quad (3.10)$$

Diese Gleichung nennt man auch Zwei-Skalengleichung und ein φ , das sie erfüllt, verfeinerbar. Sei $h_l := \langle \varphi, \mathbf{D}^{2^{-1}} \mathbf{E}^l \varphi \rangle$, auch Maske von φ genannt, und die 1-periodische Funktion

m_0 definiert durch $m_0(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-2\pi i \xi l}$. Man kann m_0 als skalierte diskrete Fouriertransformation von $h = (\dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots)$, $h \in l^2(\mathbb{Z})$, auffassen. Dann folgt aus (3.10)

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \quad (3.11)$$

Durch Induktion erhält man [13, Seite 500]

$$\hat{\varphi}(\xi) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}\xi) \right) \hat{\varphi}(0).$$

Somit ist φ komplett durch m_0 determiniert.

Mit dieser Notation folgt

Satz 3.15 *Sei $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Multi-Skalen-Analyse. Dann existiert eine zugehörige orthogonale Wavelet-Basis $\{\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \psi \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, für $L^2(\mathbb{R})$, so daß*

$$P_{V_{k-1}} = P_{V_k} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \psi \rangle \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \psi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.12)$$

ψ wird über $\hat{\psi}$ definiert als

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{2\pi i \frac{\xi}{2}} \rho(\xi) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Dabei ist ρ eine beliebige 1-periodische Funktion mit $|\rho(\xi)| = 1$ f.ü. [12, Seite 135].

3.6 Biorthogonale Wavelets

Nun sollen biorthogonale Waveletsysteme genauer untersucht werden. $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sei eine Multi-Skalen-Analyse und $\{\mathbf{E}^l \varphi \mid l \in \mathbb{Z}\}$ eine Riesz-Basis von V_0 . Sei dann $\tilde{\varphi}$ eine zu φ duale Funktion und $\tilde{\Phi}_0 := \{\mathbf{E}^l \tilde{\varphi} \mid l \in \mathbb{Z}\}$ eine zu Φ_0 duale Riesz-Basis. Unter welchen Umständen erzeugt $\tilde{\Phi}_0$ eine Multi-Skalen-Analyse, die biorthogonal zu der von Φ_0 erzeugten ist? Zur Vereinfachung der Notation sei für diesen Abschnitt die gebräuchliche Notation

$$\varphi_{k,l} := \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi,$$

$\tilde{\varphi}$, ψ und $\tilde{\psi}$ analog, eingeführt. Es muß eine der Gleichung (3.12) ähnliche Bedingung für alle $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt sein:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \tilde{\varphi}_{k-1,l} \rangle \varphi_{k-1,l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \tilde{\varphi}_{k,l} \rangle \varphi_{k,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \tilde{\psi}_{k,l} \rangle \psi_{k,l}. \quad (3.13)$$

Durch das Bilden des Skalarproduktes mit $\tilde{\varphi}_{k-1,l'}$ erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \tilde{\varphi}_{k-1,l} \rangle \langle \varphi_{k-1,l}, \tilde{\varphi}_{k-1,l'} \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \tilde{\varphi}_{k,l} \rangle \langle \varphi_{k,l}, \tilde{\varphi}_{k-1,l'} \rangle + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \tilde{\psi}_{k,l} \rangle \langle \psi_{k,l}, \tilde{\varphi}_{k-1,l'} \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Setzt man nun noch $\varphi_{k-1,l''}$ ein, so erhält man eine notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{k-1,l''}, \tilde{\varphi}_{k-1,l} \rangle \langle \varphi_{k-1,l}, \tilde{\varphi}_{k-1,l'} \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{k-1,l''}, \tilde{\varphi}_{k,l} \rangle \langle \varphi_{k,l}, \tilde{\varphi}_{k-1,l'} \rangle + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{k-1,l''}, \tilde{\psi}_{k,l} \rangle \langle \psi_{k,l}, \tilde{\varphi}_{k-1,l'} \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sei

$$\begin{aligned} h_l &:= \langle \varphi, \tilde{\varphi}_{-1,l} \rangle, \quad g_l := \langle \psi, \tilde{\varphi}_{-1,l} \rangle, \\ \tilde{h}_l &:= \langle \tilde{\varphi}, \varphi_{-1,l} \rangle, \quad \tilde{g}_l := \langle \tilde{\psi}, \varphi_{-1,l} \rangle. \end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft, daß $\varphi, \tilde{\varphi}$ Multi-Skalen-Analysen erzeugen, folgt durch einfache Substitutionen für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} h_{l-2l'} &:= \langle \varphi_{k,l'}, \tilde{\varphi}_{k-1,l} \rangle, \quad g_{l-2l'} := \langle \psi_{k,l'}, \tilde{\varphi}_{k-1,l} \rangle, \\ \tilde{h}_{l-2l'} &:= \langle \tilde{\varphi}_{k,l'}, \varphi_{k-1,l} \rangle, \quad \tilde{g}_{l-2l'} := \langle \tilde{\psi}_{k,l'}, \varphi_{k-1,l} \rangle. \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich (3.15) zu:

$$\delta_{l',l''} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\tilde{h}_{l''-2l}} h_{l'-2l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\tilde{g}_{l''-2l}} g_{l'-2l}.$$

Beschränkt man sich hier der Einfachheit halber auf reelle Wavelets mit endlichen Sequenzen h, g, \tilde{h} und \tilde{g} , so sind die Skalarprodukte reell, und man kann die komplexe Konjugation fallen lassen. Eine Fallunterscheidung für gerades und ungerades l' mit anschließender Substitution $-2j = l' - 2l$, bzw. $-2j - 1 = l' - 2l$ führt zu

$$\begin{aligned} \delta_{l',l''} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l''-l'-2j} h_{-2j} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l''-l'-2j} g_{-2j} \\ \wedge \quad \delta_{l',l''} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l''-l'-1-2j} h_{-2j-1} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l''-l'-1-2j} g_{-2j-1} \\ \Leftrightarrow \quad 2\delta_{l',l''} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l''-l'-j} h_{-j} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l''-l'-j} g_{-j} \\ \wedge \quad 0 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l''-l'-j} (-1)^j h_{-j} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l''-l'-j} (-1)^j g_{-j}. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die formalen Laurent-Reihen in $l'' - l'$, so ergibt sich durch einfache Rechenregeln:

$$\begin{aligned} 2 &= h(z)\tilde{h}(z) + g(z)\tilde{g}(z) \\ \wedge \quad 0 &= h(-z)\tilde{h}(z) + g(-z)\tilde{g}(z) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Dabei gilt die Schreibweise $\bar{a}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{-n} z^n$. Für $|z| = 1$ und $a_n \in \mathbb{R}$ folgt damit $\overline{\bar{a}(z)} = \bar{a}(z)$. Das Quadrupel h, \tilde{h}, g und \tilde{g} aus (3.16) wird auch als exakter Rekonstruktionsfilter bezeichnet [37]. Aus praktischen Gründen, die oben schon erwähnt wurden, sind insbesondere Wavelet-Basen interessant, deren Sequenzen h, \tilde{h}, g und \tilde{g} endlich sind. Unter dieser Bedingung kann man zeigen [5, Seite 495], daß g und \tilde{g} notwendigerweise von der Gestalt

$$g(z) = -\alpha^{-1}(-z)^{-k}\tilde{h}(-z), \quad \tilde{g}(z) = \alpha z^k \bar{h}(-z), \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

sind. Alle diese g und \tilde{g} sind gleichberechtigt und besitzen auch ähnliche Eigenschaften. Der Eindeutigkeit zuliebe wird daher $k = 1$ und $\alpha = 1$ gewählt, so daß g, \tilde{g} eindeutig aus h, \tilde{h} bestimmt werden können (in der Literatur sind durchaus verschiedene Wahlen zu finden, so daß die daraus resultierenden Aussagen leicht voneinander abweichen [5, Seite 495] [28, Seite 183] [29, Seite 262]); daraus folgt

$$g_n = (-1)^{n+1}\tilde{h}_{-n+1}, \quad \tilde{g}_n = (-1)^{n+1}h_{-n+1}.$$

Nun kann man wieder wie bei der Konstruktion der orthonormalen Wavelets vorgehen. Sei $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-2\pi i n \xi}$, $m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{-2\pi i n \xi}$ und \tilde{m}_0, \tilde{m}_1 analog. Dann gilt folgender Satz:

Satz 3.16 *Seien h, \tilde{h} endliche reelle Folgen, die*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l = \sqrt{2} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_l, \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \tilde{h}_{l+2k} = \delta_{k,0} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

genügen. Dann sind die folgenden unendlichen Produkte auf kompakten Mengen gleichmäßig und absolut konvergent:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \\ \hat{\tilde{\varphi}}(\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(2^{-j}\xi). \end{aligned}$$

Gelte für $\varphi, \tilde{\varphi}$ für ein $C, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(\xi)| &\leq C(1 + |\xi|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}, \\ |\hat{\tilde{\varphi}}(\xi)| &\leq C(1 + |\xi|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Sei dann

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi) &= m_1 \left(\frac{\xi}{2} \right) \hat{\varphi} \left(\frac{\xi}{2} \right), \\ \tilde{\psi}(\xi) &= m_1 \left(\frac{\xi}{2} \right) \tilde{\varphi} \left(\frac{\xi}{2} \right).\end{aligned}$$

Dann bildet $\Psi = \{\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \psi \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$ einen Frame in $L^2(\mathbb{R})$. Sein dualer Frame ist gegeben durch $\tilde{\Psi} = \{\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \tilde{\psi} \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$. Des weiteren bilden Ψ und $\tilde{\Psi}$ zwei duale Riesz-Basen mit

$$\langle \psi_{k,l}, \tilde{\psi}_{k',l'} \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'} \quad \forall k, k', l, l' \in \mathbb{Z}$$

genau dann, wenn

$$\langle \varphi, \mathbf{E}^l \tilde{\varphi} \rangle = \delta_{l,0} \quad \forall l \in \mathbb{Z}$$

erfüllt ist [5, Seite 510].

Gilt für alle $l \in \mathbb{Z}$ $h_l = \tilde{h}_l$, so folgt, daß Ψ eine Orthonormalbasis ist. Die Räume $V_k := \overline{\text{span}\{\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi \mid l \in \mathbb{Z}\}}$ und $\tilde{V}_k := \overline{\text{span}\{\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \tilde{\varphi} \mid l \in \mathbb{Z}\}}$ bilden, wie einfach nachzuprüfen ist, zwei Multi-Skalen-Analysen. Die (nicht mehr notwendigerweise orthogonalen) Komplemente der Räume V_k in V_{k-1} bzw. \tilde{V}_k in \tilde{V}_{k-1} werden gebildet durch $W_k := \overline{\text{span}\{\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \psi \mid l \in \mathbb{Z}\}}$ und $\tilde{W}_k := \overline{\text{span}\{\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \tilde{\psi} \mid l \in \mathbb{Z}\}}$. Es gelten offenbar die neuen Orthogonalitätsbeziehungen

$$V_k \perp \tilde{W}_k, \tilde{V}_k \perp W_k.$$

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten Filter h, \tilde{h} zu konstruieren, so daß die Riesz-Basen $\Psi, \tilde{\Psi}$ bestimmte Eigenschaften besitzen, die in [5, 13] beschrieben werden. So läßt sich der Grad der Symmetrie oder die Anzahl der verschwindenden Momente bei kompaktem Träger bestimmen. Die Abfallbedingung in obigem Satz läßt sich noch abschwächen, siehe hierzu [5, 6].

Man kann das Konzept der Multi-Skalen-Analyse für den $L^2(\mathbb{R})$ auf beliebige separable Hilberträume \mathcal{H} und nicht-dyadische Wavelet-Basen ausweiten. In [9, 10] werden hinreichende Kriterien für diesen Fall aufgestellt, ohne auf die Fouriertransformation zurückzugreifen.

3.7 Wavelet-Pakete

Ausgehend von den perfekten Rekonstruktionsfiltern ergibt sich eine natürliche Erweiterung des Wavelet-Konzeptes. Sei $h, \tilde{h}, g, \tilde{g}$ ein perfekter Rekonstruktionsfilter mit endlichen Sequenzen und $h = \tilde{h}$. Oben wurde eine Wavelet-Basis erzeugt, indem jeweils der Raum V_{k-1} in die orthogonalen Teilräume V_k und W_k aufgespalten wurde. Dabei wurden die Basen für die Teilräume mit Hilfe der Funktionen m_0 und m_1 aus der Basis für V_{k-1} errechnet. Verallgemeinert ergibt sich:

Lemma 3.17 Sei $\{\mathbf{E}^l u\}_{l \in \mathbb{Z}}$, $u \in L^2(\mathbb{R})$, eine Orthogonalbasis eines Teilraumes V von $L^2(\mathbb{R})$. Seien m_0 und m_1 wie oben und gelte zusätzlich

$$\inf_{\xi \in K} \inf_{n \geq 1} |m_0(2^{-n}\xi)| > 0$$

für eine kompakte Menge K kongruent zu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ modulo 1. Seien außerdem

$$\hat{u}^\sigma(\xi) = m_\sigma \left(\frac{\xi}{2} \right) \hat{u} \left(\frac{\xi}{2} \right), \sigma = 0, 1,$$

dann bildet $\{\mathbf{D}^2 \mathbf{E}^l u^0, \mathbf{D}^2 \mathbf{E}^l u^1\}_{k, l \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von V [7].

Im Falle der Wavelets war $\mathbf{D}^{2^{k-1}} \varphi = u$ und damit $\mathbf{D}^{2^k} \varphi = u^0$ und $\mathbf{D}^{2^k} \psi = u^1$. Im nächsten Schritt nimmt man bei den Wavelets den von $\{\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi\}_{l \in \mathbb{Z}}$ erzeugten Teilraum und „spaltet“ diesen wieder in zwei Teilräume. Es ist jedoch durchaus möglich, ebenfalls die W_k aufzuspalten. Folgendermaßen werden nun die Wavelet-Pakete definiert:

Definition 3.18 Es gelten die Voraussetzungen aus Satz (3.16) und sei zusätzlich $h = \tilde{h}$. Dann sei

$$\hat{\psi}_0(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$$

und ψ_k rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{2k}(\xi) &:= m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \hat{\psi}_k \left(\frac{\xi}{2} \right), \\ \hat{\psi}_{2k+1}(\xi) &:= m_1 \left(\frac{\xi}{2} \right) \hat{\psi}_k \left(\frac{\xi}{2} \right). \end{aligned}$$

Die Funktionen ψ_k , $k \in \mathbb{Z}$, sind dann die zu h und g assoziierten Wavelet-Pakete.

Offenbar entspricht ψ_0 dem φ und ψ_1 dem ψ der „normalen“ Wavelet-Basis. Die Funktionen ψ_2, ψ_3 sind die Orthonormalbasen der Zerlegung des Raumes W_{-1} . ψ_4, \dots, ψ_7 sind die Orthonormalbasen der Zerlegungen der Zerlegungen von W_{-2} , usw. So erhält man Basen für alle W_k , $k < 0$ und V_0 . Da diese Räume aber wegen (3.9) eine orthonormale Zerlegung des $L^2(\mathbb{R})$ bilden, folgt dann auch:

Satz 3.19 Die Funktionen $\{\mathbf{E}^l \psi_k \mid k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{Z}\}$ bilden eine Orthonormal-Basis für $L^2(\mathbb{R})$ [38, Seite 220].

Dieses sehr praktische Konzept läßt sich jedoch noch verallgemeinern. So spannen die Translate der Funktion $\mathbf{D}^{2^{-1}} \psi_k$ sicherlich denselben Raum wie die Translate von ψ_{2k} und ψ_{2k+1} auf (dies folgt aus der Konstruktion). Man betrachte also die Menge aller Dilatationen und Translationen von Wavelet-Paketen: $\{\mathbf{D}^{2^q} \mathbf{E}^l \psi_k\}_{k \in \mathbb{N}, q, l \in \mathbb{Z}}$. Diese Menge ist offenbar viel zu groß, um eine Basis des $L^2(\mathbb{R})$ zu bilden, aber gewisse Teilmengen tun dies ganz sicher (ein Beispiel wurde in Satz 3.19 vorgestellt). Folgender Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür an, welche Auswahlen zu Orthonormalbasen führen:

Satz 3.20 Sei das dyadische Intervall $I_{(k,q)}$ definiert durch

$$I_{(k,q)} := [2^{-q}k, 2^{-q}(k+1)).$$

Sei nun die Menge $E \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ so beschaffen, daß die dyadischen Intervalle I_e , $e \in E$, die Menge $[0, \infty)$ bis auf eine abzählbare Menge disjunkt überdecken. Dann bildet die Menge

$$\{\mathbf{D}^{2^q} \mathbf{E}^l \psi_k \mid k \in \mathbb{Z}, (k, q) \in E\}$$

eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ [22, Seite 466].

Die Wavelet Orthonormalbasen entsprechen der Wahl $E = \{(1, q) \mid q \in \mathbb{Z}\}$, so daß für die dyadischen Intervalle

$$\bigcup_{e \in E} I_e = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} I_{(q,1)} = \sum_{q \in \mathbb{Z}} [2^{-q}, 2^{-q+1}) = (0, \infty)$$

gilt, sie also das Intervall $[0, \infty)$ disjunkt bis auf den Punkt 0 überdecken.

Es wäre anzunehmen, daß sich auf ähnliche Weise wie bei den biorthogonalen Wavelet-Basen auch biorthogonale Riesz-Basen konstruieren ließen und daß eine dem Satz 3.20 äquivalente Aussage gelte. Cohen und Daubechies haben aber in [7] gezeigt, daß sich zwar biorthogonale Funktionensysteme konstruieren lassen, diese aber i.a. keine Riesz-Basen bilden. Durch das wiederholte Aufspalten wächst die obere Riesz-Schranke über jede Begrenzung.

Nun stehen zwei Gruppen von Funktionensystemen zur Verfügung. Einerseits die Weyl-Heisenberg-Systeme, andererseits die Wavelet-basierten Systeme, zu denen auch die in Satz 3.20 definierten Paket-Basen gehören. Im nächsten Kapitel wird gezeigt, wie sich diese Basen diskretisieren und in rechentechnischen Systemen implementieren lassen.

Kapitel 4

Diskretisierung

Kontinuierliche Funktionen lassen sich in numerischen Anwendungen nur approximieren. Es gibt zwei unterschiedliche Ansätze, Funktionen des $L^2(\mathbb{R})$ zu diskretisieren. Eine Möglichkeit besteht beispielsweise darin, eine der im vorigen Kapitel vorgestellten Riesz-Basen zu benutzen, um eine diskrete Darstellung zu erhalten. Da man die hier betrachteten kontinuierlichen Funktionen, die ja physikalische Signale repräsentieren, i.a. nur punktweise auswerten (abtasten) kann, ist man für die Berechnung der Skalarprodukte auf Quadraturformeln angewiesen. Dies ist aufgrund der vielen Werte, die für eine ausreichend hohe Genauigkeit benötigt würden, und dem daraus resultierenden hohen Rechenaufwand unpraktikabel.

Man verfällt daher meist auf die insbesondere von den Ingenieuren am häufigsten benutzte Methode des regelmäßigen Abtastens einer Funktion. Das Abtasttheorem von Whittaker beschreibt die Grundidee [29, Seite 47]:

Satz 4.1 *Sei*

$$h_L(t) := \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{L}\right)}{\frac{\pi t}{L}},$$

dann bildet $\{\mathbf{E}^{lL}h_L\}_{l \in \mathbb{Z}}$ eine orthogonale Basis des Raums der Funktionen, deren Fouriertransformation einen Träger besitzen, der in $[-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]$ enthalten ist. Ist nun f Element dieses Raums, so gilt

$$f(lL) = \frac{1}{L} \langle f, \mathbf{E}^{lL}h_L \rangle,$$

bzw.

$$f = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(lL) \mathbf{E}^{lL}h_L. \quad (4.1)$$

Eine bandbegrenzte Funktion kann also durch ihre in regelmäßigen Abständen abgetasteten Funktionswerte dargestellt und rekonstruiert werden. Dabei ist der Abstand der

benötigten Abtastwerte antiproportional zu der Bandbreite der Funktion. Umgekehrt kann so eine bandbegrenzte Funktion auf natürliche Weise konstruiert werden.

In der Praxis benutzt man Analog-Digital-Wandler, die eine kontinuierliche Funktion in regelmäßigen Abständen abtasten. Die Funktion kann dann z.B. den Voltpegel einer Kupferleitung darstellen. Die durch das Abtasttheorem getroffene Modellierung weicht in mehreren Punkten von den realen Eigenschaften solcher Wandler ab. Die Abtastzeitpunkte sind weder perfekt gleichmäßig, noch ist die Abtastung wirklich punktförmig: Einerseits kann der mittlere Abstand der Abtastzeitpunkte leicht vom theoretischen Wert abweichen, und selbst diese bereits verschobenen Zeitpunkte werden nicht exakt eingehalten, sondern schwanken minimal um die eigentlichen Werte. Andererseits wird durch physikalische Schranken verhindert, daß das Abtasten wirklich punktförmig ist; es kann nur durch eine Art von lokalem Integral angenähert werden. Diese Unregelmäßigkeiten können mit Hilfe von Frames mathematisch exakt modelliert werden (Frames wurden ja erstmals für die Modellierung von unregelmäßigem Abtasten eingeführt); daraus resultiert aber ein sehr unhandliches Modell, das unter den hier betrachteten Umständen wohl keine weiteren Erkenntnisse bringt.

Digital-Analog-Wandler werden benutzt, um aus diskreten Abtastwerten wieder eine kontinuierliche Funktion zu synthetisieren. Hier hat man i.a. keinerlei Einfluß auf die Art der Interpolation. Sicher ist jedoch, daß nicht Gleichung (4.1) exakt nachgebildet wird, allein schon aus dem Grund, daß die für diese Art der Rekonstruktion benötigten Funktionen keinen endlichen Träger besitzen und nicht kausal sind. Selbst dann würden dieselben Genauigkeitsprobleme wie bei den Analog-Digital-Wandlern auftreten.

Hinzu kommt, daß die empfangenen und die gesendeten Signale nie wirklich bandbegrenzt sind. All diese Nebeneffekte genau zu modellieren, würde hier nur vom eigentlichen Thema ablenken. Für weitere Informationen sei auf [20, Seite 60ff] verwiesen. Um diesen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen, beschränkt man sich im allgemeinen darauf, nur auf dem $l^2(\mathbb{Z})$ zu operieren und anzunehmen, daß sich die Eigenschaften der Folge in $l^2(\mathbb{Z})$ auf die kontinuierliche Funktion in $L^2(\mathbb{R})$ übertragen.

Im folgenden werden die im vorigen Kapitel erarbeiteten Funktionensysteme auf den $l^2(\mathbb{Z})$ übertragen und effiziente Algorithmen für die diskreten Analyse- und Syntheseoperatoren vorgestellt.

In diesem Kapitel wird teils der im Ingenieursbereich üblichen Notation gefolgt, indem die einzelnen Elemente eines Vektors x durch eckige Klammern indiziert werden. Dadurch soll in diesen Fällen die Analogie zu kontinuierlichen Funktionen betont werden.

4.1 Schnelle Fourier-Transformation

Für die diskreten Weyl-Heisenberg-Systeme, die in Sektion 4.2 vorgestellt wurden, wird die schnelle Fourier-Transformation benötigt. Unter schneller Fourier-Transformation versteht man eine Sammlung von Algorithmen, die in bestenfalls $O(N \log N)$ Schritten die diskrete Fourier-Transformation eines Vektors aus \mathbb{C}^N berechnen. Für die Berechnung der Komplexität werden nur die (komplexen) Multiplikationen herangezogen, die Additionen

hingegen werden der Einfachheit halber wegen des geringeren Aufwands vernachlässigt. Für den Fall, daß N eine Potenz von 2 ist, gibt es mehrere solche Algorithmen, von denen einer stellvertretend vorgestellt wird: der „Dezimation im Frequenzbereich“-Algorithmus. Sei also $N = 2^{N_0}$, $N_0 \in \mathbb{N}$, und $x \in \mathbb{C}^N$. Dann ist die diskrete Fouriertransformation von x als

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k n / N}$$

definiert. Die benötigten komplexen Einheitswurzeln werden vorher berechnet und in einer Tabelle abgespeichert, so daß dieser einmalige Aufwand nicht in die eigentliche Transformation einfließt. Bei einer typischen Anwendung müssen nicht für viele verschiedene N Tabellen angelegt werden, so daß der Aufwand für die Speicherung vertretbar ist. Die Inverse der diskreten Fouriertransformation berechnet sich dann durch

$$x[n] = \check{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] e^{2\pi i k n / N}.$$

Wie man sieht, wird nur ein Algorithmus für die Berechnung der diskreten Fourier-Transformation benötigt; die Inverse kann durch denselben Algorithmus berechnet werden, und es muß nur zuerst der Vektor \hat{x} umsortiert und anschließend eine Division durchgeführt werden. Berechnet man die Summen und Multiplikationen direkt, ergibt sich offenbar eine Komplexität von $O(n^2)$. Mit Hilfe des bekannten „divide et imperia“-Prinzips läßt sich die Rechnung aber wesentlich verkürzen: es gilt

$$\begin{aligned} \hat{x}[k] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-2\pi i k n / N} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k n / N} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-2\pi i k n / N} + e^{-2\pi i k (N/2) / N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x \left[n + \frac{N}{2} \right] e^{-2\pi i k n / N} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n] + (-1)^k x \left[n + \frac{N}{2} \right] \right) e^{-2\pi i k n / N}. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die geraden und ungeraden k getrennt, ergeben sich wegen $e^{-\frac{2\pi i (2r)n}{N}} = e^{-\frac{2\pi i r n}{(N/2)}}$, $r \in [0, \dots, \frac{N}{2} - 1]$, statt einer diskreten Fourier-Transformation der Länge N , zwei der halben Länge:

$$\begin{aligned} \hat{x}[2r] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n] + x \left[n + \frac{N}{2} \right] \right) e^{-\frac{2\pi i r n}{N/2}}, \\ \hat{x}[2r+1] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n] - x \left[n + \frac{N}{2} \right] \right) e^{-\frac{2\pi i r n}{N}} e^{-\frac{2\pi i r n}{N/2}}. \end{aligned}$$

Werden diese Aufspaltungen weiter fortgeführt, erhält man einen Algorithmus der Komplexität $O(n \log n)$ [30, Seite 302]. Falls N nicht wie oben angenommen eine Potenz von zwei ist, so läßt sich die Berechnung ebenfalls beschleunigen, falls N das Produkt vieler Primzahlen ist. Gilt $N = \prod_{n=1}^{P_0} p_n$, p_i prim, so ergibt sich eine Komplexität von $O(N(-P_0 + \sum_{n=1}^{P_0} p_n))$ [30, Seite 307ff]. In der Praxis wählt man seine Algorithmen und Basen jedoch meist so, daß man nur Transformationen von Vektoren berechnen muß, deren Länge eine Zweierpotenz bildet.

4.2 Weyl-Heisenberg-Systeme

Ein (zeit-)diskretes Weyl-Heisenberg-System wird ganz analog zum kontinuierlichen definiert:

Definition 4.2 Seien $g \in l^2(\mathbb{Z})$, $K, L \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in [0, 1)$. Seien der Translations- und der Modulationsoperator von $l^2(\mathbb{Z})$ nach $l^2(\mathbb{Z})$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^L g &:= (g[n - L])_{n \in \mathbb{Z}}, \\ \mathbf{M}^\alpha g &:= (e^{2\pi i n \alpha} g[n])_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Dann heißt die Menge

$$X(g, L, 1/K) := \{\mathbf{M}^{k/K} \mathbf{E}^{lL} g\}_{l \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, K-1\}}$$

(zeit-)diskretes Weyl-Heisenberg-System.

Für die Synthese und Analyse von Signalen greift man auf die schnelle Fourier-Transformation zurück. Seien $\mathbf{c}_l = \{c_l[k]\}_{k \in \{0, \dots, K-1\}} \in \mathbb{C}^K$, $K \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$, die Koeffizienten. Dann berechnet sich das Signal zu:

$$\begin{aligned} x[t] &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{K-1} c_l[k] g[t - lL] e^{2\pi i kt/K} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} g[t - lL] \sum_{k=0}^{K-1} c_l[k] e^{2\pi i kt/K} \\ &= K \sum_{l \in \mathbb{Z}} \underbrace{g[t - lL] \check{c}_l[t \bmod K]}_{=: u_l[t]} \end{aligned}$$

Um das Signal x zu senden muß immer nur der dem letzten Zeitpunkt folgende Funktionswert bekannt sein. Es ist also nicht nötig, die komplette Funktion zu berechnen, um eine Übertragung durchzuführen. Wie man sieht, ist x eine Überlagerung von Signalen u_l mit endlichem Träger. Man führt nun immer nur für jeweils ein l in aufsteigender Reihenfolge die Berechnung durch. Der Aufwand für die Berechnung eines solchen Teilsignales reduziert sich auf die Berechnung einer inversen diskreten Fourier-Transformation der Länge K und

anschließender Durchführung von N komplexen Multiplikationen, dabei ist N die Länge des Trägers von g . Das entspricht $O(K \log K)$ im Gegensatz zu $O(NK)$ bei der einfachsten Implementation. Der Analyseoperator kann auf ähnliche Weise implementiert werden:

$$\begin{aligned}
c_l[k] &= \sum_{t \in \mathbb{Z}} x[t] \bar{g}[t - lL] e^{-2\pi i k t / K} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{t=0}^{K-1} x[t - nK] \bar{g}[t - nK - lL] e^{-2\pi i k (t - nK) / K} \\
&= \sum_{t=0}^{K-1} \underbrace{\sum_{n=\lceil \frac{1-N-lL}{K} \rceil}^{\lfloor \frac{-lL}{K} \rfloor} x[t - nK] \bar{g}[t - nK - lL] e^{-2\pi i k (t - nK) / K}}_{=: b_l[t]} \\
&= \hat{b}_l[k]
\end{aligned}$$

Für die Berechnung eines c_l benötigt man also N komplexe Multiplikationen zur Berechnung von b_l und eine diskrete Fourier-Transformationen der Länge K . Das entspricht einer Komplexität von $O(K \log K)$.

Ist $(g, L, 1/K)$ eine Riesz-Basis, hat man so eine einfache Implementation des Syntheseoperators von g und des Analyseoperators von \tilde{g} .

4.3 Wavelets

Für die diskreten Wavelet-Transformation benötigt man nur einen perfekten Rekonstruktionsfilter, der die Voraussetzungen von Satz 3.16 erfüllt und eine Multi-Skalen-Analyse erzeugt. Man geht bei der Analyse davon aus, bereits die Skalarprodukte zwischen den Translaten einer Skalierungsfunktion einer Skala und der zu zerlegenden Funktion zu kennen. Diese werden dann für die Berechnung der feineren Skalen benutzt. Sei also $f \in L^2(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned}
c_k[l] &:= \langle f, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \tilde{\varphi} \rangle, \\
d_k[l] &:= \langle f, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \tilde{\psi} \rangle.
\end{aligned}$$

Dabei sind $\varphi, \tilde{\varphi}, \psi$ und $\tilde{\psi}$ die zum Rekonstruktionsfilter h, \tilde{h}, g und \tilde{g} gehörenden Wavelets und Skalierungsfunktionen. Zur Erinnerung seien

$$\begin{aligned} h[l - 2l'] &:= \langle \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \varphi, \mathbf{D}^{2^{k-1}} \mathbf{E}^l \tilde{\varphi} \rangle, \\ g[l - 2l'] &:= \langle \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \psi, \mathbf{D}^{2^{k-1}} \mathbf{E}^l \tilde{\varphi} \rangle, \\ \tilde{h}[l - 2l'] &:= \langle \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \tilde{\varphi}, \mathbf{D}^{2^{k-1}} \mathbf{E}^l \varphi \rangle \text{ und} \\ \tilde{g}[l - 2l'] &:= \langle \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \tilde{\psi}, \mathbf{D}^{2^{k-1}} \mathbf{E}^l \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Aus Formel (3.14) folgt dann sofort

$$c_{k-1}[l'] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_k[l] h[l' - 2l] + \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_k[l] g[l' - 2l]. \quad (4.2)$$

Aus (3.13) folgt hingegen durch beidseitiges Bilden des Skalarproduktes mit $\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \tilde{\varphi}$

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{k-1}[l] \tilde{h}[l - 2l'] &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle f, \mathbf{D}^{2^{k-1}} \mathbf{E}^l \tilde{\varphi} \rangle \langle \mathbf{D}^{2^{k-1}} \mathbf{E}^l \varphi, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \tilde{\varphi} \rangle \\ &= \langle f, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \tilde{\varphi} \rangle = c_k[l'], \end{aligned} \quad (4.3)$$

bzw. durch beidseitiges Bilden des Skalarproduktes mit $\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \tilde{\psi}$

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{k-1}[l] \tilde{g}[l - 2l'] &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle f, \mathbf{D}^{2^{k-1}} \mathbf{E}^l \tilde{\varphi} \rangle \langle \mathbf{D}^{2^{k-1}} \mathbf{E}^l \varphi, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \tilde{\psi} \rangle \\ &= \langle f, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^{l'} \tilde{\psi} \rangle = d_k[l']. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Besitzt man also ein c_k , kann man $c_{k'}, d_{k'}, k' > k$ berechnen. Kennt man umgekehrt ein $c_{k'}$ und $d_{k'}$ für alle k' mit $k' \leq k < k'$, kann man c_k berechnen. Formeln dieser Art kennt man aus der Nachrichtentechnik als mathematische Beschreibung von Filterbänken.

Um nun ein c_k zu erlangen, wird i.a. einfach die Funktion im Abstand 2^k abgetastet und mit dem Faktor $\sqrt{2^k}$ skaliert. Da sowohl das Abtasten als auch das Bilden des Skalarproduktes mit der Skalierungsfunktion als gewichtete Mittelwertbildung verstanden werden können, ergibt sich so je nach Wavelet und Differenzierbarkeit von f eine mehr oder weniger gute Approximation. Besitzt die Skalierungsfunktion φ p verschwindende Momente und ist $f \in L^2(\mathbb{R})$ n -mal differenzierbar auf dem Träger von $\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi$, mit $p + 1 \geq n$, dann gilt

$$\sqrt{2^{-k}} \langle f, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi \rangle = f(2^k l) + O(2^{kn}), \quad (4.5)$$

wie sich folgendermaßen zeigen läßt: Nach dem Satz von Taylor existiert eine Funktion

$\tau : \text{supp } \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi \mapsto (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned}
 \langle f, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi(t) dt \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(2^k n) \frac{1}{j!} \int_{\text{supp } \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi} (t - 2^k l)^j \frac{1}{\sqrt{2^k}} \varphi \left(\frac{t - 2^k l}{2^k} \right) dt \\
 &\quad + \int_{\text{supp } \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi} \frac{f^{(n)}(2^k n + \tau(t)(t - 2^k n))}{n!} (t - 2^k l)^n \frac{1}{\sqrt{2^k}} \varphi \left(\frac{t - 2^k l}{2^k} \right) dt. \\
 &= \sqrt{2^k} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(2^k n) \frac{2^{kj}}{j!} \int_{\text{supp } \varphi} t'^j \varphi(t') dt' \right. \\
 &\quad \left. + 2^{kn} \int_{\text{supp } \varphi} \frac{f^{(n)}(2^k n + \tau(2^k t' + 2^k l)(2^k t'))}{n!} t'^n \varphi(t') dt' \right).
 \end{aligned}$$

Wegen der verschwindenden Momente fallen alle Terme der Summe außer dem ersten weg. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 &|\sqrt{2^{-k}} \langle f, \mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi \rangle - f(2^k l)| \\
 &\leq 2^{kn} \int_{\text{supp } \varphi} \left| \frac{f^{(n)}(2^k n + \tau(2^k t + 2^k l)(2^k t))}{n!} \right| |t^n \varphi(t)| dt.
 \end{aligned}$$

Ist das essentielle Supremum von $f^{(n)}$ auf dem Träger von $\mathbf{D}^{2^k} \mathbf{E}^l \varphi$ beschränkt, ergibt sich Abschätzung (4.5). Coiflets wurden in [13] speziell für numerische Anwendungen entworfen und weisen gleichviel verschwindende Momente in Skalierungsfunktion und Wavelet auf. Sie bieten p verschwindende Momente bei einer Trägergröße von $3p - 1$. Eine bessere Genauigkeit bei größerem Rechenaufwand kann man natürlich mit Quadraturformeln erzielen, wie sie z.B. in [?] ausführlich beschrieben werden.

Für die Verwendung in der Datenübertragung ist allerdings noch eine andere Indizierung notwendig, als sie bisher benutzt wurde. Man braucht eine zeitliche Abfolge der Koeffizienten, so daß in zeitlicher Reihenfolge zu sendende Information gebündelt weggeschickt und wiedergewonnen werden kann. So ist das zum Koeffizienten $d_k[l]$ gehörende Wavelet doppelt so weit verschoben, wie das zum Koeffizienten $d_{k-1}[l]$ gehörende. Die Koeffizienten müssen also derart umsortiert werden, daß sich die zeitliche Lokalisation der Wavelets in der Lage der Koeffizienten widerspiegelt.

Die abgetasteten Werte einer zu analysierenden Funktion sollen o.B.d.A. die Skala $k = 0$ bilden. Man benutzt, um die Länge der Basisfunktionen klein zu halten, nur wenige Skalen K . Man faßt nun verschiedene Koeffizienten zu einem „Block“ zusammen:

$$b_{k,l} := \begin{cases} c_{K-1}[l] & \text{für } k = 0 \\ d_{K-1}[l] & \text{für } k = 1 \\ d_{K-2}[2 \cdot l + k - 2] & \text{für } k = 2, 3 \\ d_{K-n}[2^{n-1}(l-1) + k] & \text{für } k = 2^{n-1}(l-1), \dots, 2^{n-1}l - 1, \quad n = 3, \dots, K. \end{cases}$$

In diesem Block sind nur Wavelets enthalten, deren Träger in dem von $\mathbf{E}^l\varphi$ und $\mathbf{E}^l\psi$ enthalten sind, den Funktionen mit dem längsten Träger. Im Übereinstimmung mit der Notation der anderen Modulationssysteme wird im weiteren anstelle der Variablen $b_{k,l}$ die Variable $c_{k,l}$ benutzt.

4.4 Wavelet-Pakete

Bei Wavelet-Paketen verfährt man zur Diskretisierung wie bei Wavelets. Sei wieder $f \in L^2(\mathbb{R})$ und

$$d_q^k[l] := \langle f, \mathbf{D}^{2^q} \mathbf{E}^l \psi_k \rangle.$$

Dann folgen wie oben die Gleichungen für die Analyse

$$d_q^{2k}[l'] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h[l - 2l'] d_{q-1}^k[l], \quad (4.6)$$

$$d_q^{2k+1}[l'] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g[l - 2l'] d_{q-1}^k[l] \quad (4.7)$$

und die Gleichung für die Synthese

$$d_{q-1}^k[l'] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h[l' - 2l] d_q^{2k}[l] + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g[l' - 2l] d_q^{2k+1}[l]. \quad (4.8)$$

Welche der Gleichungen (4.6) und (4.7) man nun ausführt, hängt bei diesem Schema von der gewünschten Basis ab. Die Sortierung der Koeffizienten in „Blöcke“ ist dabei ähnlich wie bei den Wavelets zu handhaben, es ist jedoch zu beachten, daß sich u.U. die Rolle von h und g als Hoch- und Tiefpaßfilter umkehren.

Kapitel 5

Modellierung

Nun stehen verschiedene Riesz-Basen zur Verfügung, die sich gut für die Synthese und anschließenden Analyse von Signalen eignen. In diesem Kapitel wird nun gezeigt, wie diese Basen in modernen Systemen für die Hochgeschwindigkeitsdatenübertragung genutzt werden können, welche Schwierigkeiten dabei auftreten und wie man diesen Problemen begegnet.

5.1 ADSL

In den letzten Jahren ist durch das Internet der Bedarf nach hohen Datenübertragungsraten sprunghaft gestiegen. Andererseits werden durch die jetzt schon möglichen Übertragungsraten manche Anwendungen erst ermöglicht und so der Bedarf noch weiter gesteigert. Als Beispiel seien Videokonferenzen oder Video-on-demand genannt. Es wird versucht Daten über Stromleitungen, Glasfaserkabel, Funkwellen und auch über die Telefonleitungen zu übertragen. Als typisches Beispiel für ein modernes Datenübertragungssystem sei hier ADSL aufgeführt, das zur Zeit von der Deutschen Telekom AG flächendeckend unter der Bezeichnung T-DSL eingeführt wird. An den Problemen, die bei diesem System in der Praxis auftreten, sollen die in den vorangegangenen Kapiteln erarbeiteten Funktionensysteme erprobt werden.

ADSL bedeutet Asymmetric Digital Subscriber Line. Es ist ein Vertreter der xDSL Systeme und wurde erstmals für Video-on-demand entworfen. Das Problem vieler Internet-Dienstleister besteht in der Verbindung zwischen dem Endgerät des Kunden und der nur wenige Kilometer entfernt gelegenen Vermittlungsstelle. Da die Telefongesellschaften in den letzten hundert Jahren bereits ein dichtes Netzwerk doppeladriges Kupferkabel verlegt haben, sind sie in Ermangelung anderer wirtschaftlich sinnvoller Möglichkeiten bestrebt, diese Investition auch in der Zukunft zu nutzen. Während viele Experten der Meinung sind, daß als endgültige Lösung für diese letzte zu überbrückende Meile nur Glasfaserkabel in Frage kommen, sind die bereits vorhandenen Kupferkabel für einige Jahre trotz geringerer Kapazität sicher vollständig ausreichend.

Die ADSL genannte Technik ermöglicht es, weiterhin traditionelle Techniken wie Te-

lefonie und ISDN nutzen zu können, und gleichzeitig hohe Datenmengen über dieselbe Leitung zu übertragen. Das „Asymmetric“ in ADSL rührt daher, daß die mögliche Übertragungsrate zum Kunden hin größer ist als die vom Kunden weg. In Zahlen gesprochen soll ADSL Übertragungsraten von einem bis acht MBit/s vom Dienstleister zum Kunden und von 100 bis 800 KBit/s in die andere Richtung ermöglichen. Dieses Verhältnis war, wie oben bereits erwähnt, ursprünglich dazu gedacht, Videos auf Anfrage zum Kunden und nur Bestellinformationen und Steuerkommandos wie „Start“ und „Stop“ in die andere Richtung zu übertragen. Außerdem paßt es gut zum typischen Nutzungsprofil eines privaten Internetsurfers, der viele Daten aus dem Internet herunterlädt und nur wenige Steuerinformationen in die andere Richtung schickt, und hat daher nichts an Aktualität verloren. Für gewerbliche Nutzer ist derzeit ein dem ADSL verwandtes System, die Symmetric Digital Subscriber Line (SDSL), in der Entwicklung, das in beide Richtungen eine gleich hohe Übertragungsrate ermöglicht.

ADSL stellt im Gegensatz zu früheren Modems, die die Leitung exklusiv nutzen konnten, einige zusätzliche Anforderungen. Um so hohe Übertragungsraten erreichen zu können, müssen Frequenzbereiche des Kabels genutzt werden, die bisher nicht zur Verwendung vorgesehen waren. Außerdem dürfen genau die Frequenzen, für die die Kabel eigentlich gefertigt wurden und die die besten Übertragungseigenschaften besitzen, nicht benutzt werden, da sie weiterhin für die Dienste Telefonie und ISDN benötigt werden. Für ADSL stehen die Frequenzen von 30 kHz bzw. 60 kHz bei gleichzeitiger Nutzung von ISDN bis 1,104 MHz zur Verfügung.

Ein ADSL System setzt sich (vereinfacht) aus folgenden Komponenten zusammen:

- **Quelle:** Eine Quelle, die stochastisch unabhängige Datenbits produziert.
- **Kodierer:** Der Kodierer fügt Information für die Fehlerkorrektur in den Bitstrom ein, z.B. mit Hilfe von Reed-Solomon Codes, und bildet die so erhaltenen Bits auf Datensymbole ab. Diese Datensymbole sind die bereits bekannten reellen oder komplexen Koeffizienten der Basisfunktionen. I.a. steht immer nur eine endliche Anzahl von verschiedenen diskreten Werten zur Auswahl. Zur einfacheren Modellierung wird davon ausgegangen, daß die resultierenden Koeffizienten stochastisch unabhängig und gaußverteilt sind.
- **Modulator:** Dies ist die Stelle, an der der Syntheseoperator der gewählten Riesz-Basis zum Einsatz kommt.
- **Kanal:** Im Kanal werden verschiedene Schritte zusammengefaßt. Das im Modulator erzeugte diskrete Signal wird zunächst gefiltert, damit es nur den erlaubten Frequenzbereich benutzt. Dies ist notwendig, damit andere Dienste, z.B. Radio oder Steuersysteme wichtiger Maschinen, nicht gestört werden. Dann kommt die schon im letzten Kapitel erwähnte Digital-Analog-Wandlung zum Einsatz und das eigentliche Übertragen des Signals durch das Kabel. Anschließend wird das Signal wieder gefiltert, diesmal um die Störungen durch Telefonie und ISDN sowie hochfrequentes Rauschen zu entfernen. Zuletzt wird das Signal wieder abgetastet.

- **Zeitbereichs-Entzerrer:** An dieser Stelle kommen evtl. Filter zum Einsatz, die den Störungen des Signals entgegenwirken.
- **Demodulator:** Hier wird der Analyseoperator der dualen Riesz-Basis benutzt.
- **Frequenzbereichs-Entzerrer und Entscheider:** Der Frequenzbereichs-Entzerrer versucht ebenfalls Störungen in den Empfangskoeffizienten zu eliminieren. Der Entscheider bildet im Anschluß daran den so entstörten Koeffizienten auf das nächstgelegene erlaubte Datensymbol ab und liefert diese Entscheidung an den Entzerrer zurück (dazu mehr in Sektion 5.4).
- **Dekodierer:** In dieser Einheit werden die Koeffizienten zu Bits dekodiert und evtl. vorhandene Information zur Fehlerkorrektur ausgenutzt.
- **Senke:** Die Datenbits werden den zugehörigen Applikationen übermittelt.

Dies beschreibt die Datenübertragung in eine Richtung. Gleichzeitig läuft die Übertragung natürlich auch in die andere. Für all diese Schritte steht nur eine begrenzte Zeitspanne zur Verfügung, damit auch Applikationen möglich sind, die auf kurze Reaktionszeiten angewiesen sind wie z.B. die Internet-Telefonie. Bei ADSL sollte dieser Vorgang nicht mehr als 2 ms betragen. Erst in letzter Zeit sind Prozessoren erschwinglich geworden, die all dies in dieser Zeitspanne ermöglichen. Komplexe Codes und Modulationsverfahren, die viel Rechenzeit beanspruchen, sind deswegen erst in den letzten Jahren verstärkt zum Einsatz gekommen. Es ist aber immer noch so, daß jede Mikrosekunde zählt, und daher wird immer abgewägt, ob mehr Zeit zum Kodieren oder zum Modulieren verwandt werden soll. Auch die Komplexität der Entzerrer ist zum größten Teil durch diese maximale Latenzzeit begrenzt.

Der rapide Fortschritt in der Prozesstechnik ermöglicht aber immer aufwendigere Verfahren und damit auch höhere Übertragungsraten. Die aktuelle Technik setzt immer noch viele Schranken, jedoch ist davon auszugehen, daß in wenigen Jahren Verfahren benutzt werden können, die heute noch nicht realisierbar sind. Der Entwicklungsaufwand wird sich binnen absehbarer Zeit auszahlen, solange der Aufwand eines Verfahrens nicht lächerlich hoch ist und die erreichten Übertragungsraten die erhöhte Komplexität rechtfertigen.

5.2 Kanalmodell

Im vorangegangenen Abschnitt wurde schon vorgestellt, was im „Kanal“ passiert. Zu der eigentlichen Übertragung durch das Kabel wurden noch einige andere Effekte hinzugenommen, die sich mathematisch gut gemeinsam beschreiben lassen. Der Kanal wird als lineares translationsinvariantes (LTI) System modelliert, zu dem anschließend weißes gaußsches Rauschen addiert wird. Dies ist natürlich nur eine Approximation an einen realen Kanal. So werden bspw. die Effekte der A/D- und D/A-Wandler nicht berücksichtigt. Auch Störungen durch parallel laufende Kabel und Echos werden von diesem Modell unterschlagen. Dennoch liefert es verwertbare Resultate, die auch in der Praxis noch Bestand haben. Die

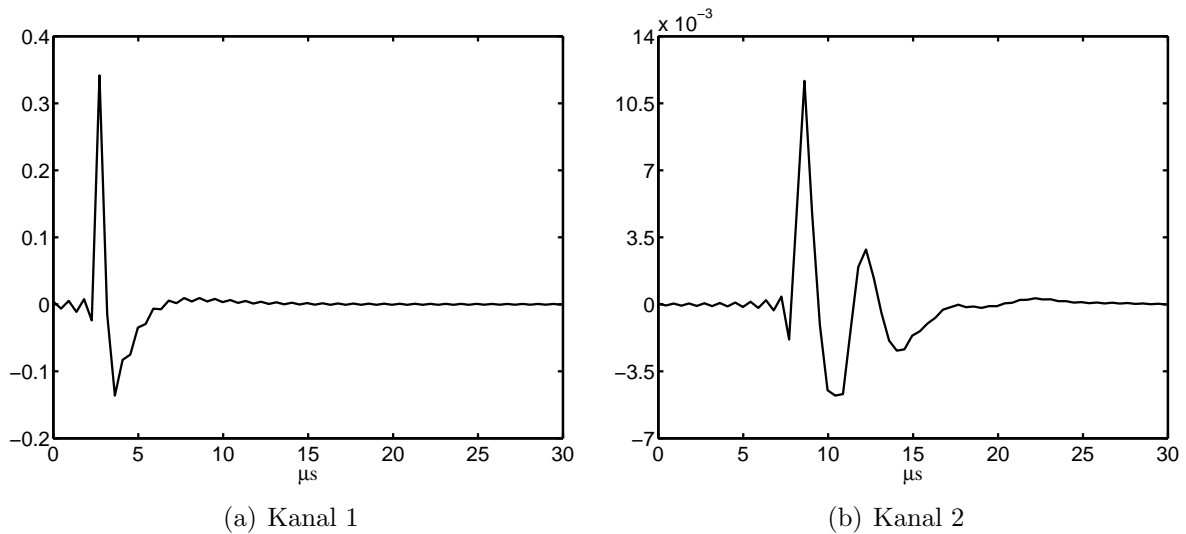


Abbildung 5.1: Dies sind die beiden Impulsantworten, die in dieser Arbeit für die numerischen Simulationen herangezogen werden. Kanal 1 modelliert eine homogene Kupferleitung von 0,5 km Länge und stellt einen gutartigen Kanal dar. Kanal 2 modelliert eine Kupferleitung von 1,7 km Länge mit zwei etwa 300 Meter langen Stichleitungen und fungiert als schlechter Kanal.

oben genannten Effekte sorgen dafür, daß der Kanal seine Translations-Invarianz verliert; dieser Vorgang geht jedoch im Verhältnis zu der Datenrate langsam genug vonstatten, so daß er zeitlich lokal immer noch gut durch ein LTI-System approximiert werden kann (es werden immerhin ca. 2 Millionen Symbole pro Sekunde übertragen).

Lineare translationsinvariante Systeme werden durch Faltung des Signals mit einer Impulsantwort modelliert. Die Impulsantwort ist dabei ein Vektor $h \in l^2(\mathbb{Z})$ mit endlichem Träger. Das Fraunhofer-Institut hat neben anderen ein physikalisches Modell erstellt, mit dessen Hilfe man Impulsantworten für verschiedene Kabel und Kabellängen erzeugen kann [19]. Abbildung 5.1 stellt die beiden in Kapitel 6 in der Simulation verwendeten Impulsantworten dar. Am Betragsfrequenzgang in Abbildung 5.2 ist in etwa abzulesen, welche Frequenzen sich gut für die Datenübertragung eignen. Das in allen elektrischen Geräten vorhandene thermische Rauschen und verschiedene andere Störungen durch parallel laufende Kabel werden zu weißem gaußschen Rauschen w zusammengefaßt, das zum Ergebnis der Faltung addiert wird (es gibt ausgefeiltere Modelle für Fremdstörungen, so werden in der Standardisierung von ADSL verschiedene Störer genauer untersucht [1, 16]). Aufgrund dieses Rauschens können auch Funktionensysteme benutzt werden, die eigentlich keinen kompakten Träger besitzen, sondern nur stark abfallen. In diesem Fall vernachlässigt man den Teil des Trägers, dessen Pegel unterhalb des Rauschpegels liegt. Der Effekt des Kanals auf ein Signal $x \in l^2(\mathbb{Z})$ ist also

$$\tilde{x} = x * h + w.$$

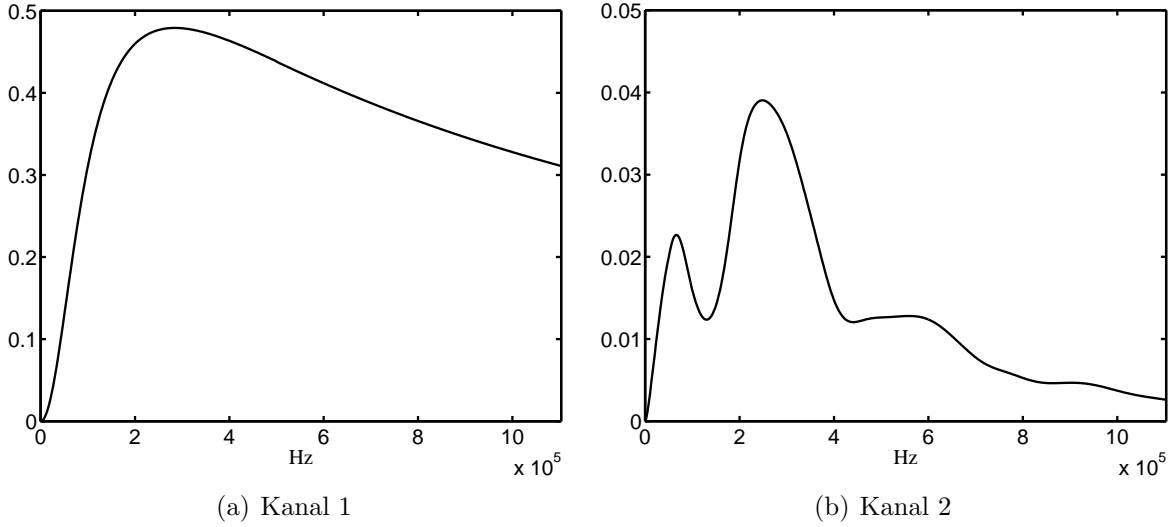


Abbildung 5.2: Hier ist in nicht-logarithmischer Darstellung der Betrag der Frequenzgänge der beiden Impulsantworten abgebildet, die in Abbildung 5.1 eingeführt worden sind.

5.3 DMT

Das Discrete Multitone (DMT) genannte Verfahren ist das momentan verbreitetste standardisierte Verfahren für ADSL Systeme [1]. Es ist ein einfaches nicht-überlappendes Weyl-Heisenberg System. Als Fensterfunktion wird eine χ Funktion benutzt:

$$G_{DMT} := G(\chi_{[0,L-1]}, L, 1/K) = \{\mathbf{M}^{k/K} \mathbf{E}^{lL} \chi_{[0,L-1]}\}_{l \in \mathbb{Z}, k \in [0, K-1]}.$$

Das biorthogonale System ist in diesem Fall nicht das kanonische. Es wird

$$\tilde{G}_{DMT} := G(\chi_{[L-K,L-1]}, L, 1/K) = \{\mathbf{M}^{k/K} \mathbf{E}^{lL} \chi_{[L-K,L-1]}\}_{l \in \mathbb{Z}, k \in [0, K-1]}$$

gewählt, um die numerische Realisierung des Analyseoperator zu vereinfachen und die durch die Faltung verursachten Störungen leichter entfernen zu können. Bei ADSL wird K gleich 512 gesetzt und L zwischen 512 und 544 gewählt. Da als Abtastrate 2,208 MHz gewählt werden, entspricht das einem Frequency-Division-Multiplexing mit einem Trägerabstand von 4,3125 kHz. Mit diesen Funktionen werden dann informationstragende Koeffizienten moduliert, die hier als $c_{k,l}$, $k \in \{0, \dots, 512\}$, $l \in \mathbb{Z}$, definiert werden. Um ein reelles Sendesignal zu erzeugen, werden nur die ersten 256 Sendekoeffizienten benutzt und die zweiten 256 durch die komplex-konjugierten ersten bestimmt: $c_{512-k,l} := \overline{c_{k,l}}$, $k \in \{1, \dots, 255\}$. Außerdem werden die Koeffizienten $c_{k,l}$, $k \in \{0, \dots, 7, 256\}$, auf Null gesetzt, um die normale Telefonie nicht zu stören. Die ersten $K - L$ von Null verschiedenen Koeffizienten der Basisfunktionen werden zyklischer Präfix genannt. Er wurde aus zwei Gründen eingeführt. Ein Problem ist die Synchronisation zwischen Sende- und Empfangsseite, und durch die zyklische Verlängerung der Basisfunktionen werden die Auswirkungen einer nicht perfekten Synchronisation reduziert. Ein anderes Problem ist die bereits erwähnte Störung

des Signals durch die Faltung. Ist die Impulsantwort des Kanals (die auch die durch die fehlerhafte Synchronisation verschuldete Verschiebung beinhaltet) nun kürzer als die Differenz $K - L$, so läßt sich diese Störung durch jeweils eine komplexe Multiplikation pro Empfangskoeffizient korrigieren:

Sei N die Länge des Trägers der Impulsantwort, dann berechnet sich das Empfangssignal zu

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= h * x[n] + w[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[n-m]x[m] + w[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[n-m] + w[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{K-1} c_{k,l} \chi_{[0,L-1]}[n-m-lL] e^{2\pi i k(n-m-lL)/K} + w[n].\end{aligned}$$

Da das System irgendwann ein- und wohl auch irgendwann ausgeschaltet wird, kann man $\mathbf{c}_l := \{c_{k,l}\}_{k \in \{0, \dots, K-1\}} = 0$ für alle $|l| > C$, $C \in \mathbb{N}$ setzen. Damit ist die unendliche Summe nur noch endlich und die Summationsreihenfolge kann vertauscht werden.

Durch Bilden des Skalarproduktes errechnen sich die Empfangskoeffizienten $\tilde{c}_{k,l}$.

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{k',l'} &= \langle \tilde{x}, \mathbf{M}^{k'/K} \mathbf{E}^{l'L} \chi_{[0,K-1]} \rangle \\ &= \frac{1}{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{K-1} h[m] c_{k,l} \chi_{[0,L-1]}[n-m-lL] e^{2\pi i k(n-m-lL)/K} \\ &\quad \overline{\chi_{[L-K,L-1]}[n-l'L] e^{2\pi i k'(n-l'L)/K}} + \langle w, \mathbf{M}^{k'/K} \mathbf{E}^{l'L} \chi_{[L-K,L-1]} \rangle.\end{aligned}$$

Im allgemeinen kann insbesondere bei langen Leitungen nicht davon ausgegangen werden, daß $N \leq (L - K)$ gilt. Ist dies für den Kanal noch nicht gegeben, existieren aber Verfahren, die die Impulsantwort — wenn auch nicht beliebig — verkürzen können [3]. Damit folgt $\chi_{[0,L-1]}[n-m-lL] \chi_{[L-K,L-1]}(n-l'L) = 0$, für $l \neq l'$. Das bedeutet, daß keine sog. „Interblockinterferenzen“ auftreten. Als „Block“ bezeichnet man das von einem c_l erzeugte Signal.

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{k',l'} &= \frac{1}{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} h[m] c_{k,l'} \chi_{[0,L-1]}[n-m-l'L] e^{2\pi i k(n-m-l'L)/K} \\ &\quad \chi_{[L-K,L-1]}[n-l'L] e^{-2\pi i k'(n-l'L)/K} + \langle w, \mathbf{M}^{k'/K} \mathbf{E}^{l'L} \chi_{[L-K,L-1]} \rangle \\ &= \frac{1}{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} h[m] c_{k,l'} \chi_{[L-K,L-1]}[n-l'L] \\ &\quad e^{2\pi i(k-k')(n-l'L)/K} e^{-2\pi i km/K} + \langle w, \mathbf{M}^{k'/K} \mathbf{E}^{l'L} \chi_{[L-K,L-1]} \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{K} \sum_{n=(L-K)+l'L}^{(L-K)+l'L+K-1} \sum_{k=0}^{K-1} c_{k,l'} e^{2\pi i(k-k')(n-l'L)/K} \sum_{m=0}^{N-1} h[m] e^{-2\pi i km/K} \\
 &\quad + \langle w, \mathbf{M}^{k'/K} \mathbf{E}^{l'L} \chi_{[L-K, L-1]} \rangle.
 \end{aligned}$$

Man kann $\hat{h}[k] := \sum_{m=0}^{N-1} h[m] e^{-2\pi i km/K}$ als diskrete Fouriertransformation des Vektors $(h[0], \dots, h[N-1], 0, \dots, 0)$ der Länge K auffassen. Durch zusätzliche Vertauschung der Summen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{k',l'} &= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} c_{k,l'} \hat{h}[k] \sum_{n=(L-K)+l'L}^{(L-K)+l'L+K-1} e^{2\pi i(k-k')(n-l'L)/K} + \langle w, \mathbf{M}^{k'/K} \mathbf{E}^{l'L} \chi_{[L-K, L-1]} \rangle \\
 &= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} c_{k,l'} \hat{h}[k] \underbrace{\sum_{n=0}^{K-1} e^{2\pi i(k-k')n/K}}_{=K\delta_{k,k'}} + \langle w, \mathbf{M}^{k'/K} \mathbf{E}^{l'L} \chi_{[L-K, L-1]} \rangle \\
 &= \hat{h}[k'] c_{k',l'} + \langle w, \mathbf{M}^{k'/K} \mathbf{E}^{l'L} \chi_{[L-K, L-1]} \rangle.
 \end{aligned}$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen kann man also die gestörten Koeffizienten $\tilde{c}_{k,l}$ mittels der Division durch $\hat{h}[k]$ bis auf den Einfluß des Rauschen entzerren.

5.4 Entzerrer

Im Gegensatz zum gerade vorgestellten DMT Modulationsverfahren sind i.a. kompliziertere Entzerrer nötig, um vernünftige Resultate zu erhalten. Im Zeitbereich ist man bestrebt die Faltung zu invertieren. Da es jedoch schwierig ist, Entzerrer auf der vollen Rate von 2,208 MHz zu betreiben (eigentlich ist die Rate auf der A/D- und D/A-Wandler fahren sogar noch höher, um Aliasing-Effekte zu reduzieren) und die Rückkopplungsmöglichkeit fehlt, ist man bestrebt nur die demodulierten Daten zu entzerren. Dort hat man auch die Möglichkeit Information über den Fehler, den der Entscheider zurückliefert, in das Verfahren miteinzubeziehen.

In diesem Abschnitt wird ein verbreitetes lineares Verfahren zum Entstören von Signalen vorgestellt. Zunächst wird jedoch ein im weiteren Verlauf der Arbeit benötigtes Lemma aufgestellt, das die statistischen Eigenschaften der informationstragenden Koeffizienten unter Modulation, Übertragung und Demodulation beleuchtet:

Lemma 5.1 *Seien $\mathbf{c}_l = \{c_{k,l}\}_{k \in \{0, \dots, K-1\}}$, $l \in \mathbb{Z}$, K -dimensionale (komplexe) Zufallsvariablen mit*

$$E(c_{k,l} c_{k',l'}) = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \quad E(c_{k,l}) = 0.$$

Sei $\{\mathbf{E}^{lL} g_k\}_{l \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, K-1\}}$ eine translationsinvariante Riesz-Basis von (einem Teilraum von) $l^2(\mathbb{Z})$ und $\{\mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k\}_{l \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, K-1\}}$ ein zugehöriges Biorthogonalsystem, dabei haben g_k

und \tilde{g}_k endlichen Träger. Dann seien die K -dimensionalen komplexen Zufallsvariablen \tilde{c}_l definiert durch

$$\tilde{c}_{k,l} := \left\langle h * \sum_{l' \in \mathbb{Z}} \sum_{k'=0}^{K-1} c_{k',l'} \mathbf{E}^{l'L} g_{k'}, \mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k \right\rangle,$$

$h \in l^2(\mathbb{Z})$ mit kompaktem Träger. Dann sind die Erwartungswerte $E(c_{k,l} \tilde{c}_{k',l'})$ und $E(\tilde{c}_{k,l} \tilde{c}_{k',l'})$ nur von k, k' und der Differenz $l - l'$ abhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned} E(\tilde{c}_{k,l} \tilde{c}_{k',l'}) &= E \left(\left\langle h * \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} c_{n,m} \mathbf{E}^{mL} g_n, \mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k \right\rangle \left\langle h * \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \sum_{n'=0}^{K-1} c_{n',m'} \mathbf{E}^{m'L} g_{n'}, \mathbf{E}^{l'L} \tilde{g}_{k'} \right\rangle \right) \\ &= E \left(\left\langle \sum_{f \in \mathbb{Z}} h[\cdot - f] \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} c_{n,m} \mathbf{E}^{mL} g_n[f], \mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k \right\rangle \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\langle \sum_{f' \in \mathbb{Z}} h[\cdot - f'] \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \sum_{n'=0}^{K-1} c_{n',m'} \mathbf{E}^{m'L} g_{n'}[f'], \mathbf{E}^{l'L} \tilde{g}_{k'} \right\rangle \right) \\ &= E \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{f \in \mathbb{Z}} h[t - f] \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} c_{n,m} \mathbf{E}^{mL} g_n[f] \mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k[t] \right. \\ &\quad \cdot \left. \sum_{t' \in \mathbb{Z}} \sum_{f' \in \mathbb{Z}} h[t' - f'] \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \sum_{n'=0}^{K-1} c_{n',m'} \mathbf{E}^{m'L} g_{n'}[f'], \mathbf{E}^{l'L} \tilde{g}_{k'}[t'] \right) \\ &= E \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{f \in \mathbb{Z}} h[t - f] \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} c_{n,m} \mathbf{E}^{mL} g_n[f] \mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k[t] \right. \\ &\quad \cdot \left. \sum_{t' \in \mathbb{Z}} \sum_{f' \in \mathbb{Z}} h[t' - f'] \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \sum_{n'=0}^{K-1} c_{n',m'} \mathbf{E}^{m'L} g_{n'}[f'], \mathbf{E}^{l'L} \tilde{g}_{k'}[t'] \right) \\ &= E \left(\sum_{t, t' \in \mathbb{Z}} \sum_{f, f' \in \mathbb{Z}} \sum_{m, m' \in \mathbb{Z}} \sum_{n, n'=0}^{K-1} h[t - f] h[t' - f'] c_{n,m} c_{n',m'} \right. \\ &\quad \cdot \left. \mathbf{E}^{mL} g_n[f] \mathbf{E}^{m'L} g_{n'}[f'] \mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k[t] \mathbf{E}^{l'L} \tilde{g}_{k'}[t'] \right) \\ &= \sum_{t, t' \in \mathbb{Z}} \sum_{f, f' \in \mathbb{Z}} \sum_{m, m' \in \mathbb{Z}} \sum_{n, n'=0}^{K-1} h[t - f] h[t' - f'] \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \\ &\quad \cdot \mathbf{E}^{mL} g_n[f] \mathbf{E}^{m'L} g_{n'}[f'] \mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k[t] \mathbf{E}^{l'L} \tilde{g}_{k'}[t'] \\ &= \sum_{t, t' \in \mathbb{Z}} \sum_{f, f' \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} h[t - f] h[t' - f'] \mathbf{E}^{mL} g_n[f] \mathbf{E}^{mL} g_n[f'] \mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k[t] \mathbf{E}^{l'L} \tilde{g}_{k'}[t'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t,t' \in \mathbb{Z}} \sum_{f,f' \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} h[t + l'L - f] h[t' + l'L - f'] \\
&\quad \cdot \mathbf{E}^{mL} g_n[f] \mathbf{E}^{mL} g_n[f'] \mathbf{E}^{lL} \tilde{g}_k[t + l'L] \mathbf{E}^{l'L} \tilde{g}_{k'}[t' + l'L] \\
&= \sum_{t,t' \in \mathbb{Z}} \sum_{f,f' \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} h[t - f] h[t' - f'] \\
&\quad \cdot \mathbf{E}^{mL} g_n[f + l'L] \mathbf{E}^{mL} g_n[f' + l'L] \mathbf{E}^{(l-l')L} \tilde{g}_k[t] \tilde{g}_{k'}[t'] \\
&= \sum_{t,t' \in \mathbb{Z}} \sum_{f,f' \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} h[t - f] h[t' - f'] \mathbf{E}^{(m-l')L} g_n[f] \mathbf{E}^{(m-l')L} g_n[f'] \mathbf{E}^{(l-l')L} \tilde{g}_k[t] \tilde{g}_{k'}[t'] \\
&= \sum_{t,t' \in \mathbb{Z}} \sum_{f,f' \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} h[t - f] h[t' - f'] \mathbf{E}^{mL} g_n[f] \mathbf{E}^{mL} g_n[f'] \mathbf{E}^{(l-l')L} \tilde{g}_k[t] \tilde{g}_{k'}[t'] \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{K-1} \langle h * E^{mL} g_n, \tilde{g}_{k'} \rangle \langle h * E^{mL} g_n, \mathbf{E}^{(l-l')L} \tilde{g}_k \rangle
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hängt offenbar nur von k, k' und $l - l'$ ab. Die Rechnung für den anderen Erwartungswert kann analog durchgeführt werden. \square

Die Idee des hier im folgenden vorgestellten Entzerrers besteht nun darin, die zum Zeitpunkt $T + d$, $T, d \in \mathbb{N}$, d klein, bekannten Realisierungen der Zufallsvariable $\tilde{\mathbf{c}}_l$, zu benutzen, um einen „besseren“ Koeffizientenvektor $\check{\mathbf{c}}_T$ zu berechnen. Da nur ein endliches Alphabet zur Verfügung steht, wird das entstörte Symbol im Entscheider dem nächsten Alphabetsymbol zugeordnet. Dieses wird im weiteren Verlauf auf Bits abgebildet und dekodiert. Da es zu viel Zeit kosten würde, das Ergebnis der Dekodierung abzuwarten, kann nur die Differenz zwischen dem Alphabetsymbol und $\check{\mathbf{c}}_T$ für die Fehlerkontrolle benutzt werden. Manchmal werden auch die durch den Entscheider bereits auf das Sendalphabet abgebildeten Symbole in den Entzerrungsprozeß mit einbezogen. Die Handhabung solcher Rückkopplungen ist aufgrund der Nicht-Linearität problematisch und wird in der Praxis aufgrund der Sensibilität in Bezug auf Fehler trotz ihrer Effektivität selten benutzt. Aus diesem Grund und aus der Tatsache, daß die Rechnung mit Rückkopplungskomponente ähnlich verläuft, sei daher dieser Rückkopplungszweig außer Acht gelassen und nur die Kenntnis von $\check{\mathbf{c}}_T - \mathbf{c}_T$ vorausgesetzt.

Da die Entzerrung für jedes l in möglichst wenig Zeit durchgeführt werden muß, soll die Entstörung unabhängig von l sein, so daß kein zusätzlicher Aufwand anfällt. Sei also I_k die Menge aller Indize der Koeffizienten, die herangezogen werden, um das Element $c_{k,0}$ zu entstören. Das könnte bspw.

$$I_k := \{(k', l') \mid \max\{0, k - s_k\} \leq k' \leq \min\{K, l + s_k\}, -s_l \leq l' \leq s_l\}$$

sein. Dabei bezeichnet s_l die Anzahl der in Betracht gezogenen zeitlich vor und hinter dem zu entstörenden Symbol liegenden Koeffizientenvektoren und s_k die Anzahl der in Betracht gezogenen daneben liegenden Koeffizienten.

Als besonders effizient hat es sich erwiesen, genau diejenigen gestörten Koeffizienten zum Entstören heranzuziehen, in denen beim Senden eines Symbols $c_{k,l}$ die meiste Energie konzentriert ist:

$$I_k \in \left\{ I \subset \mathcal{I} \mid |I| = m \wedge c_{k',l'} = \delta_{k,k'} \delta_{0,l'} \quad \forall (k', l') \in \mathcal{I} \wedge \sum_{(k',l') \in I} |\tilde{c}_{k',l'}| = \max_{J \subset \mathcal{I}, |J|=m} \sum_{(k',l') \in J} |\tilde{c}_{k',l'}| \right\}$$

Die Ausgabe eines solchen linearen Entzerrers sei mit dieser Notation

$$\check{c}_{k,l} = \sum_{(k',l') \in I_k} b_{k,k',l'} \tilde{c}_{k',l+l'}.$$

Die $b_{k,k',l'}$ sind die Koeffizienten des Entzerrers. Wegen Lemma 5.1 genügen drei Dimensionen zur Implementierung einer linearen Abbildung, die auf einem zwei-dimensionalen Raum operiert. Man beachte, daß für jedes $k \in \{0, \dots, K-1\}$ ein eigener Entzerrer benötigt wird. In der Praxis ist die Anzahl der in Betracht gezogenen Koeffizienten aus praktischen Gründen meist klein, da der Rechenaufwand proportional zu der Anzahl der Koeffizienten steigt. So wird z.B. bei GSM-Mobiltelefonen dieser Entzerrer mit $|I_k|=3$ betrieben. Seien $i_1, \dots, i_{|I_k|} \in I$, mit $i_m \neq i_n$ für $m \neq n$, $m, n \in \{1, \dots, |I_k|\}$ und $(k_j, l_j) := i_j$ für $j \in \{1, \dots, |I|\}$. Damit ergeben sich folgende zusammenfassende Schreibweisen:

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{k_1, l_1}^k \\ \vdots \\ b_{k_{|I|}, l_{|I|}}^k \end{pmatrix}, \mathbf{c}_{k,l} = \begin{pmatrix} c_{k_1, l+l_1} \\ \vdots \\ c_{k_{|I|}, l+l_{|I|}} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{c}}_{k,l} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{k_1, l+l_1} \\ \vdots \\ \tilde{c}_{k_{|I|}, l+l_{|I|}} \end{pmatrix}.$$

Das Ziel ist es, den mittleren Quadratfehler zu minimieren (Minimum mean square error). Dieser Fehler beträgt in Abhängigkeit von \mathbf{b}_k

$$\begin{aligned} f_{\text{MSE}}(\mathbf{b}_k) &= E \|\check{c}_{k,l} - c_{k,l}\|^2 = E \|\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T \mathbf{b}_k - c_{k,l}\|^2 \\ &= E(\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T \mathbf{b}_k - c_{k,l})(\overline{\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T \mathbf{b}_k - c_{k,l}}) \\ &= E(\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T \mathbf{b}_k \overline{\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T \mathbf{b}_k}) - E(\tilde{c}_{k,l} \overline{\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T \mathbf{b}_k}) \\ &\quad - E(c_{k,l} \overline{\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T \mathbf{b}_k}) + E(c_{k,l} \overline{\tilde{c}_{k,l}}) \\ &= \mathbf{b}_k^T E(\tilde{\mathbf{c}}_{k,l} \overline{\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T}) \bar{\mathbf{b}}_k - E(\tilde{c}_{k,l} \overline{\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T}) \mathbf{b}_k \\ &\quad - E(c_{k,l} \overline{\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T}) \bar{\mathbf{b}}_k + E(c_{k,l} \overline{\tilde{c}_{k,l}}) \\ &= \mathbf{b}_k^T \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{b}}_k - \mathbf{s}_k \bar{\mathbf{b}}_k - \bar{\mathbf{s}}_k \mathbf{b}_k + E(c_{k,l} \overline{\tilde{c}_{k,l}}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k &= E(\tilde{\mathbf{c}}_{k,l} \overline{\tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T}) = \begin{pmatrix} E(\tilde{c}_{k_1, l+l_1} \overline{\tilde{c}_{k_1, l+l_1}}) & \dots & E(\tilde{c}_{k_1, l+l_1} \overline{\tilde{c}_{k_{|I_k|}, l+l_{|I_k|}}}) \\ \vdots & & \vdots \\ E(\tilde{c}_{k_{|I_k|}, l+l_{|I_k|}} \overline{\tilde{c}_{k_1, l+l_1}}) & \dots & E(\tilde{c}_{k_{|I_k|}, l+l_{|I_k|}} \overline{\tilde{c}_{k_{|I_k|}, l+l_{|I_k|}}}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E(\tilde{c}_{k_1, l_1} \overline{\tilde{c}_{k_1, l_1}}) & \dots & E(\tilde{c}_{k_1, l_1} \overline{\tilde{c}_{k_{|I_k|}, l_{|I_k|}}}) \\ \vdots & & \vdots \\ E(\tilde{c}_{k_{|I_k|}, l_{|I_k|}} \overline{\tilde{c}_{k_1, l_1}}) & \dots & E(\tilde{c}_{k_{|I_k|}, l_{|I_k|}} \overline{\tilde{c}_{k_{|I_k|}, l_{|I_k|}}}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{s}_k = E(c_{k,l} \tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T) = \begin{pmatrix} E(c_{k,l} \tilde{c}_{k_1, l+l_1}) \\ \vdots \\ E(c_{k,l} \tilde{c}_{k_{|I_k|}, l+l_{|I_k|}}) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E(c_{k,0} \tilde{c}_{k_1, l_1}) \\ \vdots \\ E(c_{k,0} \tilde{c}_{k_{|I_k|}, l_{|I_k|}}) \end{pmatrix}^T.$$

Die zweite Gleichheit folgt jeweils aus Lemma 5.1 und belegt, daß die Matrix \mathbf{R}_k und der Vektor \mathbf{s}_k nicht von l abhängen.

Da die Matrix \mathbf{R}_k und der Vektor \mathbf{s}_k i.a. unbekannt sind, ist es nicht ohne weiteres möglich eine analytische Lösung zu berechnen. I.a. kann man diese Matrizen auch durch Testreihen annähern, dies ist aber relativ zeitaufwendig. Solche Entzerrer nennt man aus offensichtlichen Gründen MSE-optimal. f_{MSE} wird nun mittels eines einfachen Gradientenverfahrens minimiert. Als positive quadratische Form besitzt es naturgemäß nur ein Extremum, ein Minimum. Gegeben sei Startvektor $\mathbf{b}_k^{(0)}$. Es soll gewährleistet sein, daß $f_{\text{MSE}}(\mathbf{b}_k^{(j)}) > f_{\text{MSE}}(\mathbf{b}_k^{(j+1)})$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Dazu wird der Gradient von f_{MSE} benötigt. Bekanntermaßen gilt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \Re z} + i \frac{\partial f}{\partial \Im z} \right)$. Mit dem Wirtinger Kalkül [18, Seite 20] folgt also

$$\nabla f_{\text{MSE}}(\mathbf{b}_k^{(j)}) = (\mathbf{b}_k^{(j)})^T \mathbf{R}_k - \mathbf{s}_k.$$

Der nächste Vektor errechnet sich dann jeweils durch

$$\mathbf{b}_k^{(j+1)} = \mathbf{b}_k^{(j)} - \delta_k^{(j)} \nabla f_{\text{MSE}}(\mathbf{b}_k^{(j)})^T,$$

dabei ist $\delta_k^{(j)}$ eine kleine positive Zahl.

Nun wird für die Berechnung von $\nabla f_{\text{MSE}}(\mathbf{b}_k^{(j)})$ immer noch die Matrix \mathbf{R}_k und der Vektor \mathbf{s}_k benötigt. Es existiert aber ein erwartungstreuer Schätzer für den Gradienten, der mit minimalem Aufwand eine Schätzung liefert:

Satz 5.2 $(\check{c}_{k,l} - c_{k,l}) \tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Gradienten $\nabla f_{\text{MSE}}(\mathbf{b}_k^{(j)})$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla f_{\text{MSE}}(\mathbf{b}_k^{(j)}) &= (\mathbf{b}_k^{(j)})^T \mathbf{R}_k - \mathbf{s}_k = (\mathbf{b}_k^{(j)})^T E(\tilde{\mathbf{c}}_{k,l} \tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T) - E(c_{k,l} \tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T) \\ &= E((\mathbf{b}_k^{(j)})^T \tilde{\mathbf{c}}_{k,l} \tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T - c_{k,l} \tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T) = E((\check{c}_{k,l} - c_{k,l}) \tilde{\mathbf{c}}_{k,l}^T). \end{aligned}$$

□

Damit ergibt sich der nächste Vektor durch

$$\mathbf{b}_k^{(j+1)} = \mathbf{b}_k^{(j)} - \delta_k^{(j)} (\check{c}_{k,l} - c_{k,l}) \tilde{\mathbf{c}}_{k,l}.$$

Da nun nur noch eine Schätzung des Gradienten verwendet wird, nennt man dieses Verfahren „stochastisches Gradientenverfahren“. Die Wahl von $\delta_k^{(j)}$ bestimmt das Konvergenzverhalten dieses Algorithmus und ist bereits Thema von vielen Untersuchungen geworden [31]. In der Praxis hat sich

$$\delta_k = \frac{1}{5|I| \sqrt{\sum_{(k,l) \in I} \tilde{c}_{k,l}}}$$

als gut erwiesen [32, Seite 588]. So können hierbei unter schlechten Bedingungen durchaus mehrere 10.000 Iterationen nötig sein, um zu einem guten Entzerrer zu kommen. Da aber hunderttausende Symbole pro Sekunde entstört werden, also hunderttausende Iterationen pro Sekunde stattfinden, fällt das schlechte Konvergenzverhalten kaum ins Gewicht. Beim Einschalten des Systems werden bekannte Trainingsinformationen übertragen, mit denen sich das System einschwingt. Nach wenigen Sekunden und mehreren hunderttausend Iterationen hat der Entzerrer ein Optimum erreicht und kann für die Übertragung von Daten verwendet werden. Andere Verfahren passen z.B. den Korrekturfaktor für jeden Entzerrerkoeffizient gesondert an und erzielen damit ein besseres Konvergenzverhalten, erfordern aber viel mehr Aufwand [24, Seiten 508ff].

Ein deterministisches System versagt i.a. wenn der Kanal sich verändert. Es ist durchaus üblich, daß sich die Impulsantwort eines solchen Systems im Verhältnis zu der Datenrate langsam verändert. Bei einem deterministischen System müssen so in regelmäßigen Abständen die Koeffizienten des Entzerrers neu berechnet werden. Für einen MSE-optimalen Entzerrer ist so jedesmal die Gleichung (5.1) zu lösen. Dabei ist es gerade bei einem sich verändernden Kanal problematisch, die Impulsantwort oder $\mathbf{R}_k, \mathbf{s}_k$ zuverlässig auszumessen. Das stochastische Gradientenverfahren hingegen hat den Vorteil, daß es sich automatisch an den sich verändernden Kanal anpaßt, da der Schätzer für den Gradientenvektor jeweils ein Schätzer für die aktuelle Impulsantwort ist. Dadurch erklärt sich die weite Verbreitung dieses Verfahrens.

Es sei in Erinnerung gerufen, daß für den Iterationsprozeß die Werte von c_l benötigt werden. So werden beim „Einschalten“ des Systems vorher vereinbarte Werte übertragen. Erst nach dieser Trainingszeit folgen zufällige Informationen. In dieser Phase werden die benötigten c_l mit Hilfe des Entzerrers und zusätzlicher Kodierungsverfahren errechnet. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß sich in diese Rechnung hin und wieder Fehler einschleichen, insbesondere wenn der Kanal stark verrauscht ist. Treten diese Fehler nur sehr vereinzelt auf, so hat das kaum Einfluß auf das Konvergenzverhalten dieses Verfahrens. Der δ -Faktor wird so klein gewählt, daß einzelne Fehler das System kaum beeinflussen. Häufen sich die Fehler, dann tritt eine positive Rückkopplungsschleife in Aktion, so daß der Entzerrer immer schlechter anstatt besser wird. In solchen Fällen muß der Entzerrer wieder mit vorher vereinbarten Werten neu eintrainiert werden.

Kapitel 6

Numerische Ergebnisse

Nun stehen alle benötigten Hilfsmittel zur Verfügung, um die im bisherigen Verlauf der Arbeit vorgestellten Funktionensysteme für die Datenübertragung zu benutzen. In diesem Kapitel werden zwei verschiedene Testumgebungen betrachtet. Kanal eins modelliert das Verhalten einer Kupferleitung mit einer Länge von 0,5 km. Dies sind ideale Verhältnisse, die in der Praxis selten angetroffen werden. Im Gegensatz dazu modelliert Kanal zwei eine Kupferleitung von 1,7 km Länge, an die an mehreren Stellen Stichleitungen angeschlossen sind. Die daraus resultierende Impulsantwort ist sehr schwach und dient hier als Beispiel für einen schlechten Kanal. Der Verlauf der beiden Impulsantworten und der Frequenzgang der Kanäle wurde bereits in den Abbildungen 5.1 und 5.2 vorgestellt. Diese Kanäle werden sowohl rauschfrei als auch mit weißem Rauschen mit einer Pegelhöhe von -40 dB relativ zum Sendesignal und dem Rauschmodell B aus der ANSI-Norm [1] betrachtet. Für die Analyse der Signale wird das Verhältnis zwischen dem Nutzsignal und den im Signal enthaltenen Störungen herangezogen. Dieses Verhältnis ist folgendermaßen definiert:

Definition 6.1 Sei $y \in l^2(\mathbb{Z})$ ein Nutzsignal und $w \in l^2(\mathbb{Z})$ die darin enthaltene Störkomponente. Das Verhältnis zwischen Signal und Störung (im weiteren vom englischen her kommend SNR — Signal to Noise Ratio — abgekürzt) ist definiert durch [24, Seite 68]

$$\text{SNR} = \frac{\|y\|_2^2}{\|w\|_2^2}.$$

Je höher das SNR, desto besser ist die Übertragung. Es wird i.a. in dB angegeben.

Auf experimentelle Weise wird dann das SNR der empfangenen Koeffizienten berechnet. Im besten Fall sollte sich dieses SNR der einzelnen Kanäle dem SNR des Übertragungskanals annähern.

Durch diese Kanäle wird nun Information gesendet, die mit verschiedenen Funktionensystemen moduliert wird. Als Referenzsystem wird hierbei das DMT-ANSI mit zyklischer Präfix-Länge 32 benutzt. Diesem werden verschiedene Wavelet-basierte Systeme gegenübergestellt. Es werden normale Wavelets, Mallats Mirrorwavelets und Waveletpakete benutzt. Wavelets sind allgemein bekannt; die Mirrorwavelets unterteilen die hochfrequenten

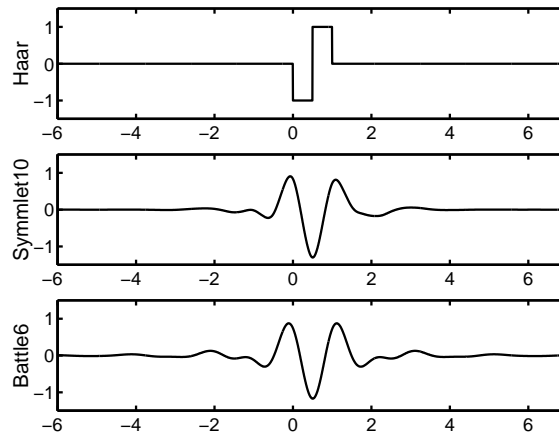


Abbildung 6.1: Dies sind die Mutterwavelets der hier durchgeführten Versuche.

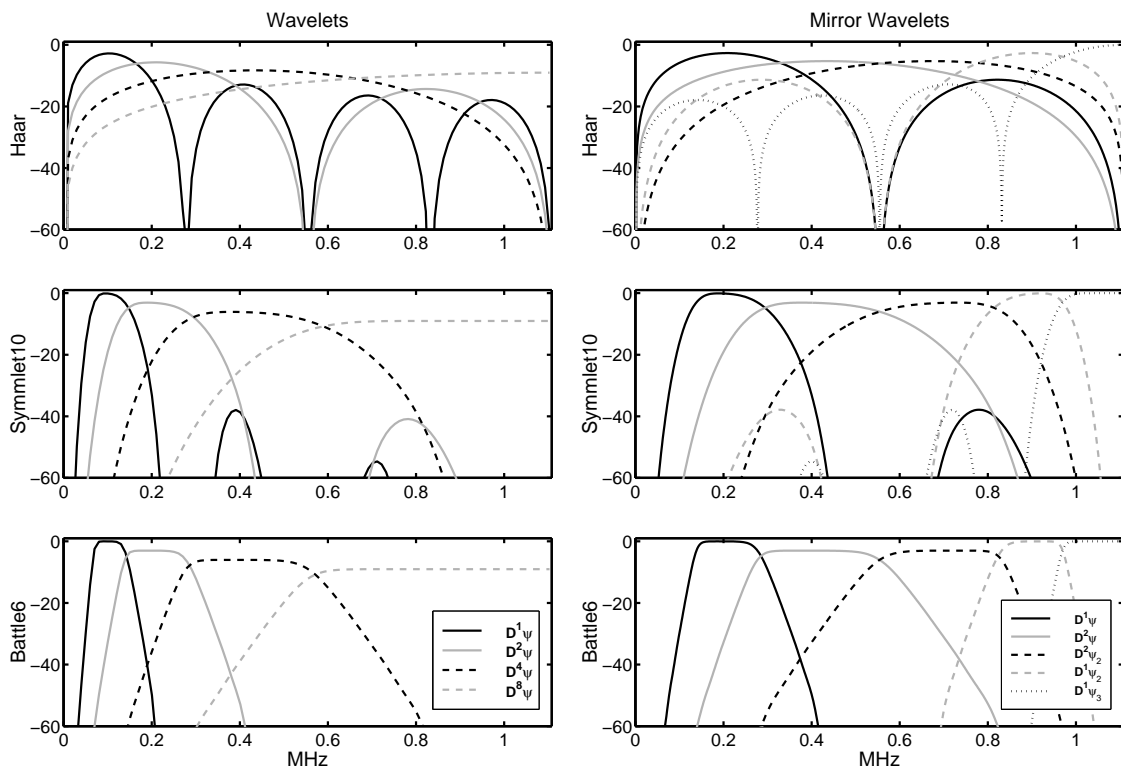


Abbildung 6.2: Hier sind die normierten Fouriertransformationen der Wavelets und Mirrorwavelets in dB über MHz dargestellt. Um eine bessere Überschaubarkeit zu gewährleisten, sind im linken Bild nur vier Skalen und im rechten nur drei Zerlegungen abgebildet. Die Skalierungsfunktionen sind nicht dargestellt, da die Gleichfrequenzanteile bei ADSL nicht genutzt werden können. ψ bezeichnet das normale Mutterwavelet, ψ_2 ist seine „Spiegelung“ und ψ_3 ist die „gespiegelte“ Skalierungsfunktion.

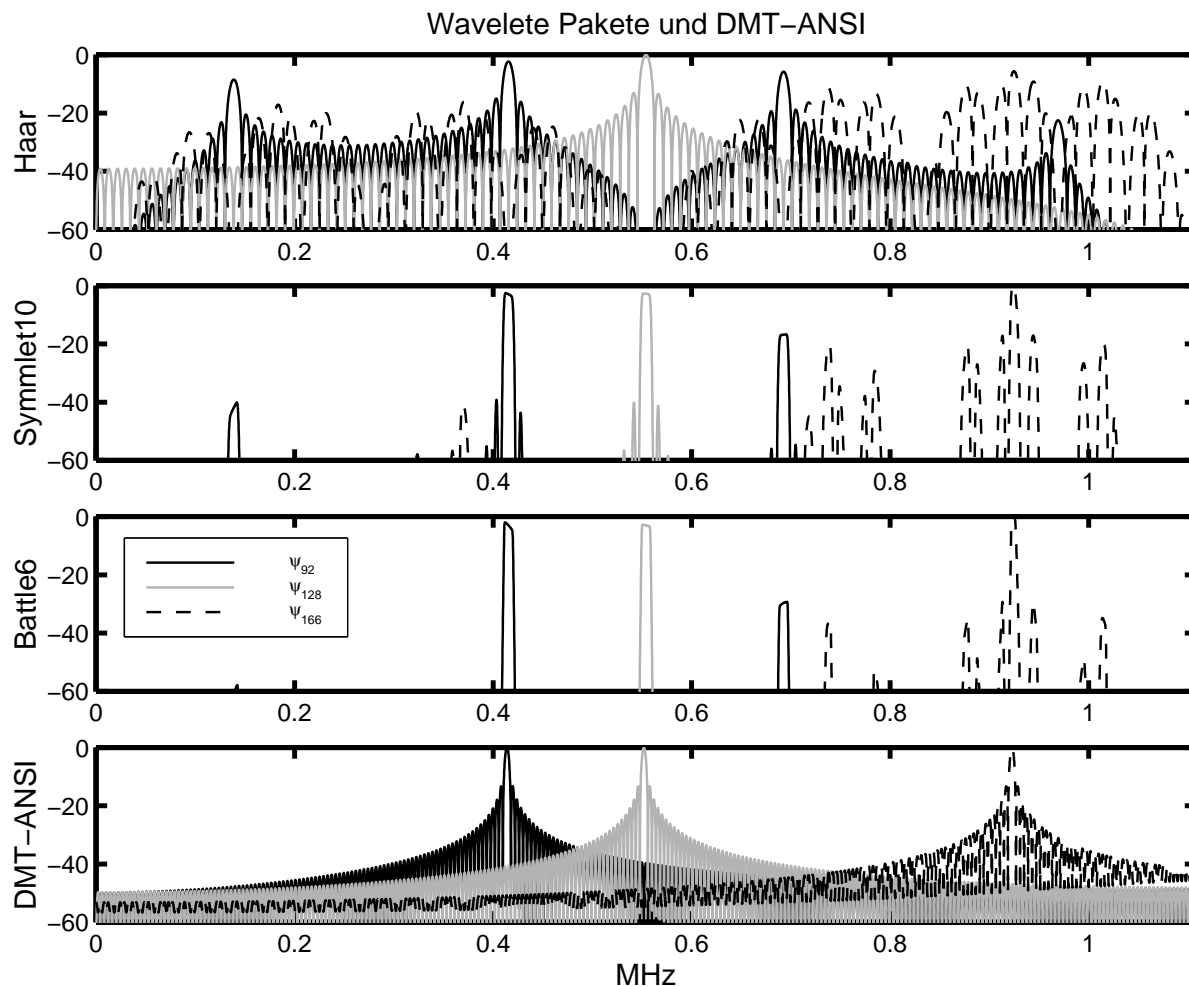


Abbildung 6.3: Die Fouriertransformationen von Waveletpaketen niedriger Skalen sind aus offensichtlichen Gründen nicht repräsentativ für die höherer Skalen. Daher sind hier nur drei Funktionen dargestellt. Man erkennt deutlich die in [22] vorhergesagten Nebenmaxima. Die Indize stehen für die Kanalnummern. ψ_{128} ist das am besten lokalisierte Waveletpaket, ψ_{166} eines der schlechteren. Aufgrund der Ähnlichkeit zwischen Weyl-Heisenberg-Systemen und Waveletpaketen sind im untersten Bild die den oberen Bildern entsprechenden DMT Funktionen abgebildet. Bei den auf Battle6 und Symmlet10 basierenden Waveletpaketen ist das alle Frequenzen erfassende „Grundrauschen“ der Funktionen so gering, daß es in den Abbildungen nicht mehr dargestellt wird. Die anderen beiden Funktionensysteme besitzen eine schlechte Lokalisation, da ihre Grundimpulse, die Haarfunktion und das Rechteckfenster, ebenfalls schlecht lokalisiert sind.

Wavelets nochmals spiegelbildlich zum unteren Frequenzbereich (s. Abb. 6.2). Sie werden hier benutzt, da der Betragsfrequenzgang bei höheren Frequenzen schlechter wird. Es erscheint sinnvoll, diesen Bereich auf mehrere Funktionen aufzuteilen. Unter Waveletpaketen werden hier Wavelets verstanden, die bis zu einer gewissen Skala komplett aufgespaltet wurden. In diesem Fall werden acht Aufspaltungen durchgeführt, so daß sich 256 verschiedene Funktionen pro Sendeblock ergeben. Da solch eine hohe Anzahl von Funktionen jede Darstellung sprengen würde, sind in Abbildung 6.3 nur drei beispielhaft dargestellt. Diesen dreien werden die entsprechenden drei Funktionen des DMT-ANSI Systems gegenübergestellt. Deutlich sind die erwarteten Nebenmaxima zu sehen, deren Existenz in [22] näher untersucht wurden. Sie werden zu starken Interkanalinterferenzen führen. Aufgrund der Ähnlichkeit zu Weyl-Heisenberg-Systemen und der guten Frequenzformbarkeit wird dieses Funktionensystem dennoch untersucht [27].

Als Mutterwavelets werden das bekannte Haar-Wavelet, sowie Symmlet10 und Battle6 benutzt. Das Haar-Wavelet wurde ausgewählt, da es im Verhältnis zu allen anderen Wavelets den kürzesten Träger besitzt. Battle6 besitzt, wie in Abbildung 6.2 zu sehen ist, im Gegensatz zu dem Haar-Wavelet sehr gute Frequenzeigenschaften, aber einen sehr großen Träger. Als Kompromiß zwischen diesen beiden Extremen fungiert das Symmlet10-Wavelet, mit dem die meisten Experimente durchgeführt werden.

Ein weiteres Hilfsmittel, mit dem sich gut zeigen läßt, wie die Funktionen einer Basis sich gegenseitig stören, ist die Grammatrix. Bei den hier verwendeten translationsinvarianten Systemen ergeben sich Block-Töplitz-Matrizen. Es wird folgende Sortierung benutzt:

Definition 6.2 Sei $\{\mathbf{E}^l r_k\}_{l \in \mathbb{Z}, k \in \{1, \dots, K\}} \subset l^2(\mathbb{Z})$, $K \in \mathbb{N}$, eine Rieszbasis und $\{\mathbf{E}^l \tilde{r}_k\}_{l \in \mathbb{Z}, k \in \{1, \dots, K\}} \subset l^2(\mathbb{Z})$ eine dazu biorthogonale Rieszbasis. Sei weiterhin $h \in l^2(\mathbb{Z})$ eine Kanalimpulsantwort. Dann wird die (vierdimensionale) Grammatrix¹ G definiert als

$$G(l, l', k, k') := \langle h * \mathbf{E}^l r_k, \mathbf{E}^{l'} r_{k'} \rangle.$$

Dabei wird häufig nur ein Ausschnitt gezeigt werden. Aus der Translationsinvarianz der Rieszbasen folgt $G(l, l', k, k') = G(0, l - l', k, k')$. Von besonderem Interesse sind also die Matrizen

$$G(l) := \left(\langle h * r_k, \mathbf{E}^l r_{k'} \rangle \right)_{k, k' \in \{1, \dots, K\}}.$$

Dann zeigt die Matrix $G(0)$ die Interkanalinterferenzen und die Matrizen $G(l)$, $l \neq 0$, die Interblockinterferenzen. Wegen der speziellen Struktur von G beinhalten die Matrizen $G(l)$ bereits alle für die Konstruktion von G nötigen Informationen. Besitzen die Funktionensysteme kompakten Träger, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $G(l) = 0$ für $|l| > N$ gilt.

Als Anordnung der Kanäle wurde folgendes Schema verwandt: Ist eine Funktion in höheren Frequenzen als eine andere lokalisiert, so wird ihr ein höherer Index zugeordnet. Sind verschiedene Funktionen auf derselben Frequenz lokalisiert (wenn sie bspw. bis auf Translation gleich sind), so folgt aus höherem Index eine spätere zeitliche Lokalisation.

¹Eigentlich handelt es sich hierbei um Kreuzgrammatrizen.

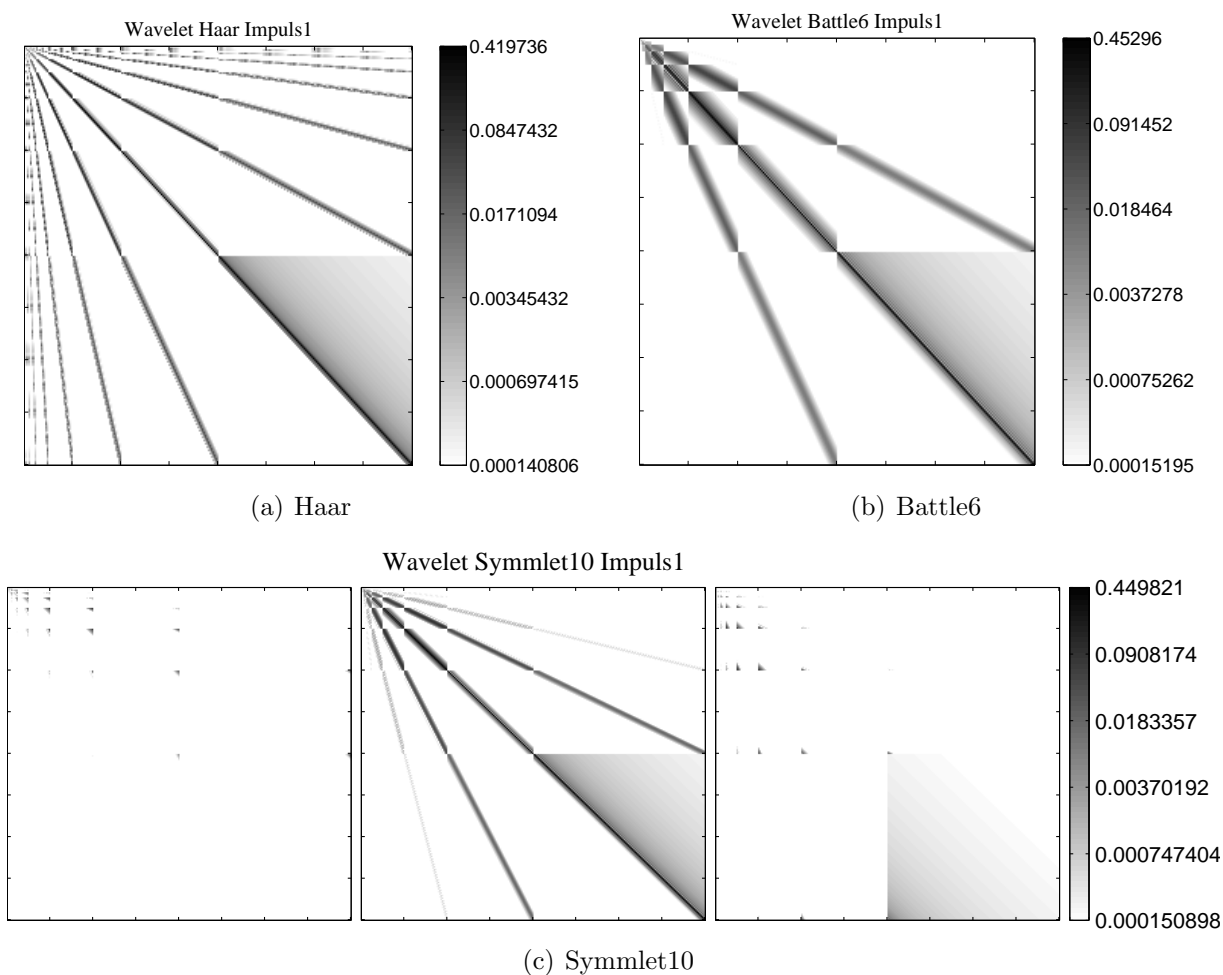


Abbildung 6.4: Durch die Verzerrung von Kanal eins ist die Orthogonalität zwischen „benachbarten“ Wavelets zerstört. Dies ist deutlich an den diagonalen Bändern zu erkennen. Das kompakte Haar Wavelet erhält aufgrund der Kürze seiner Funktionen sehr dünne Bänder, jedoch infolge seiner breiten Ausdehnung im Frequenzbereich viele Bänder. Im Gegensatz dazu besitzt das im Frequenzbereich gut lokalisierte Battle6-Wavelet nur zwei nennenswerte Nebendiagonalen, die wegen der schlechten Zeitlokalisierung aber besonders breit sind. Einen Mittelweg beschreitet das Symmlet10-Wavelet, von dem auch die Interblockinterferenzen abgebildet sind.

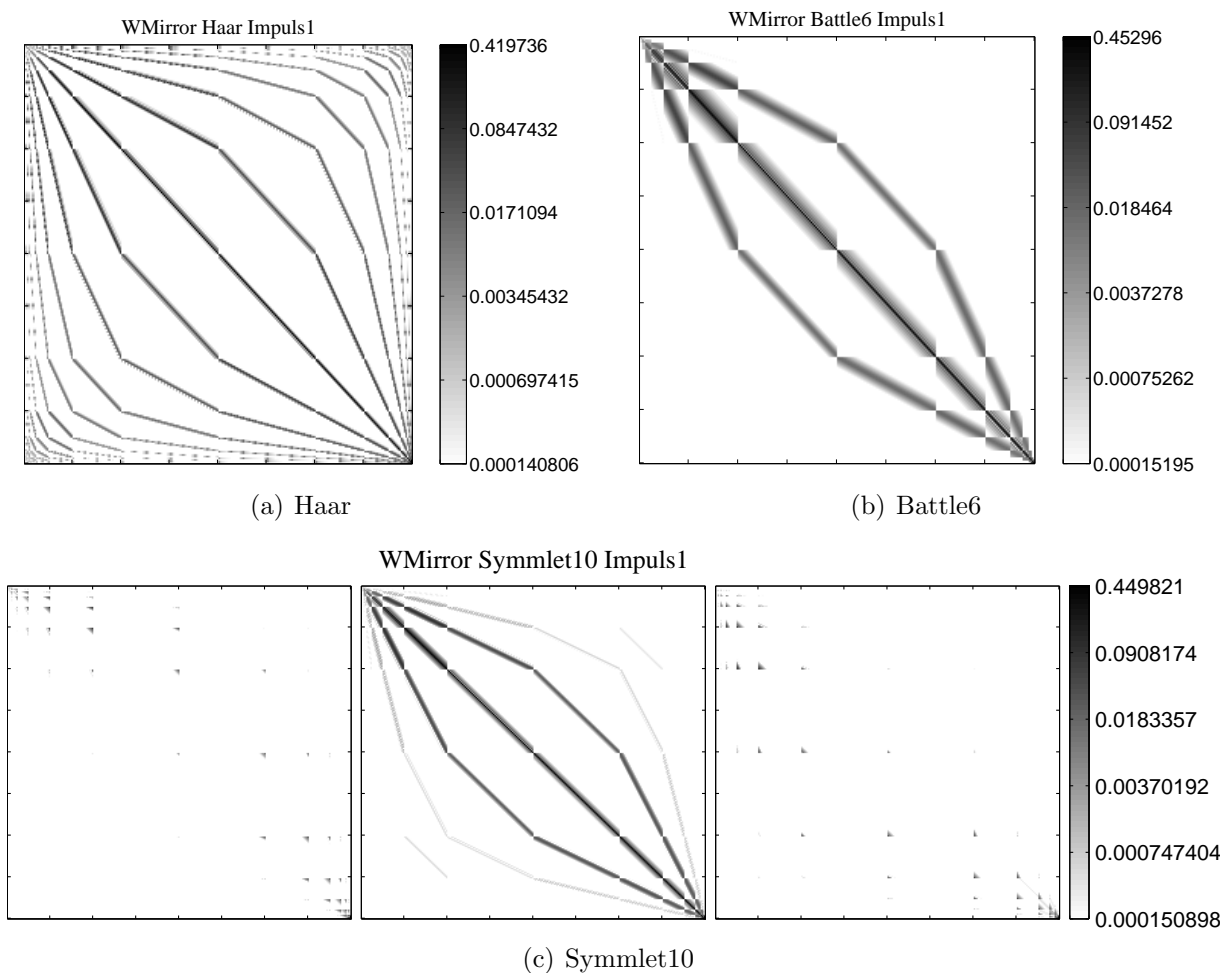


Abbildung 6.5: Die Mirrorwavelets sind den normalen Wavelets aufgrund ihrer Konstruktion sehr ähnlich. Der obere linke Quadrant ist bei beiden Systemen zwangsläufig identisch. Die anderen drei Quadranten sind erwartungsgemäß spiegelbildlich zum Mittelpunkt der Matrix, bis auf die Tatsache, daß die Koeffizienten im unteren rechten Teil der Matrix betragsmäßig kleiner sind als im oberen linken. Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem Frequenzgang des Kanals.

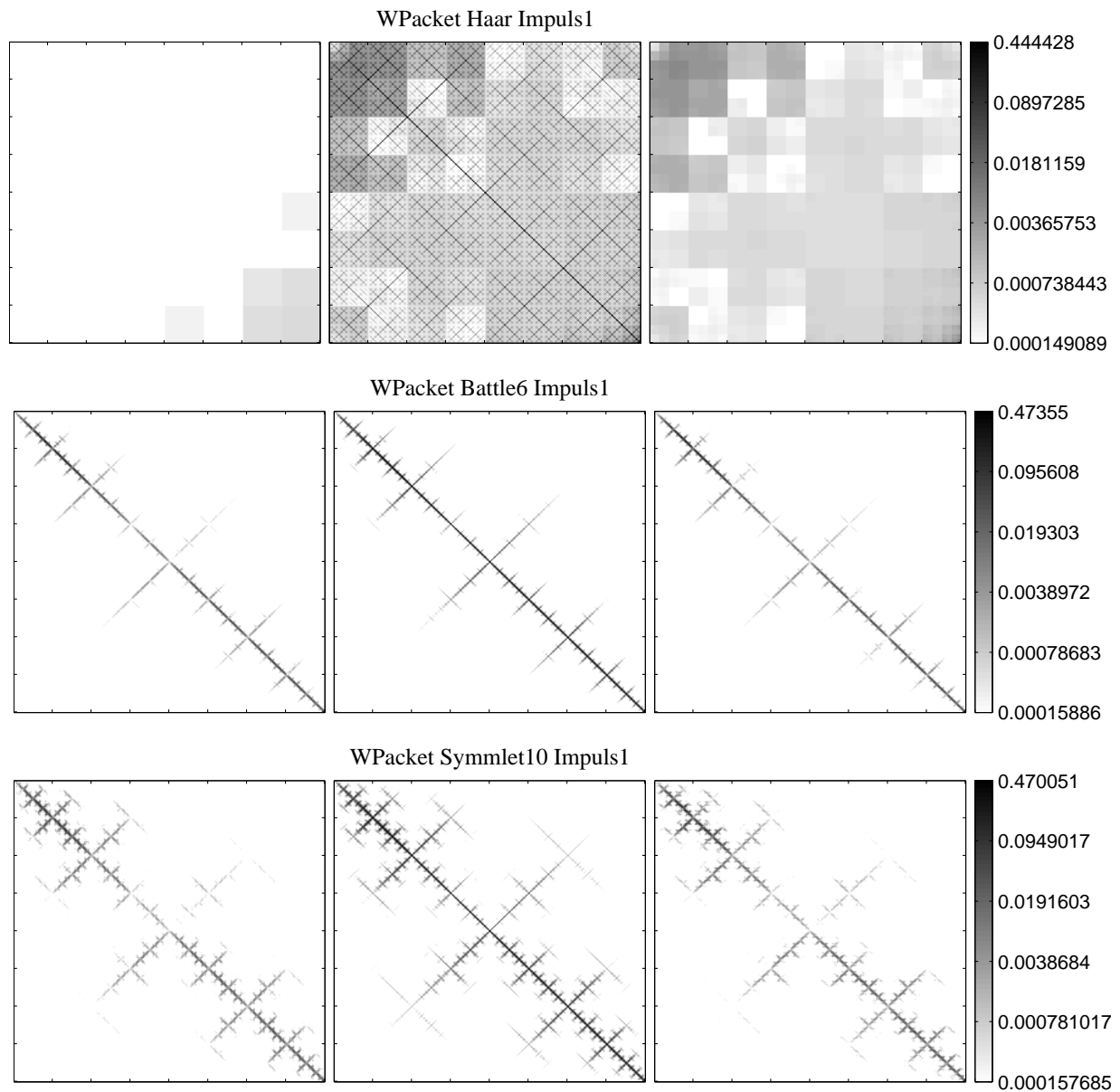


Abbildung 6.6: Wegen der großen zeitlichen Ausdehnung der Battle6- und Symmlet10-Waveletpakete sind hier bei allen drei Wavelets die Interblockinterferenzen dargestellt. Die großen in Abbildung 6.3 dargestellten Nebenmaxima führen zu wenigen, aber betragsmäßig großen Interkanalinterferenzen.

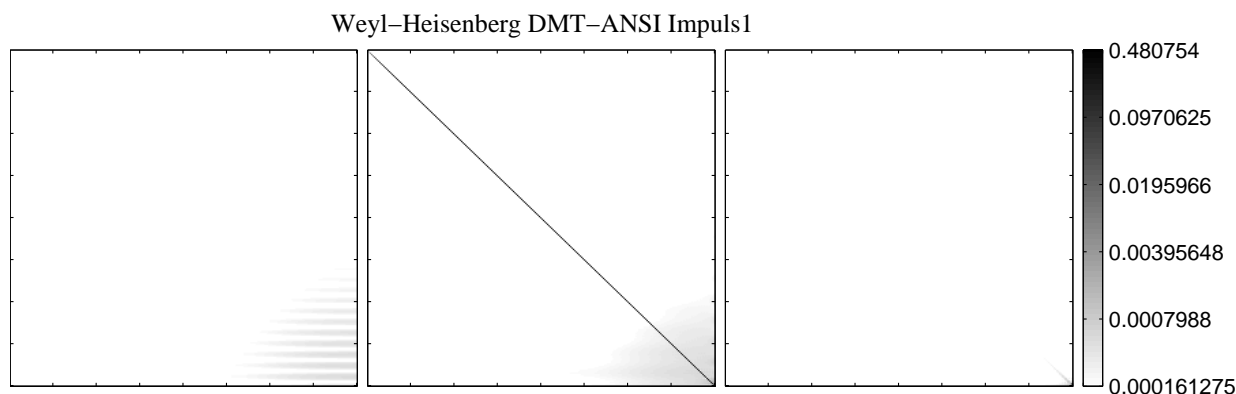


Abbildung 6.7: Das DMT-ANSI System hat aufgrund seiner Anpassung an Faltungsoperatoren eine gute Matrixstruktur. Aufgrund der Rechteck-Fensterfunktion ist jedoch der nicht besonders gut zu erkennende „Teppich“ an Grundrauschen höher als bei den anderen Verfahren.

6.1 Die Modulationssysteme

Die in den Abbildungen 6.4 bis 6.6 dargestellten Ausschnitte der Grammatrizen der betreffenden Modulationssysteme erlauben schon Aufschluß über die zu erwartende Leistung. Wird nur eine Matrix dargestellt, so ist dies immer $G(0)$, bei mehreren handelt es sich um $G(-1)$, $G(0)$ und $G(1)$ in ebendieser Reihenfolge.

Bei den normalen Wavelets und den Mirrorwavelets stören die Nebendiagonalen die Datenübertragung, jedoch ist das Niveau dieser Seitenbänder deutlich unter dem Niveau der Hauptdiagonalen, so daß die Interferenzen beherrschbar sein sollten. Die große Ausdehnung der kleinen normalen Wavelets im Frequenzbereich macht sie anfällig für die starke Dämpfung hoher Frequenzen des Kanals. Da diese kleinen Wavelets eine Translationskonstante von nur zwei vorweisen, sind sie besonders empfindlich für die durch die Faltung in das Signal eingefügten verschobenen Kopien der Wavelets. Dies ist in Abbildung 6.4 gut am langen Ausklingen der Hauptdiagonalen im unteren rechten Quadranten zu beobachten. Die Mirrorwavelets vermeiden beide Probleme. Den schlechten hohen Frequenzen werden eigene Funktionen zugeordnet, und die bei den normalen Wavelets kurzen Funktionen werden durch längere ersetzt, so daß sich im unteren rechten Quadranten ein insgesamt besseres Bild mit weniger Interferenzen bietet.

Die Waveletpakete besitzen wenige, dafür starke Interkanalinterferenzen, die von den Nebenmaxima herrühren. Manche der Funktionen werden nicht gestört und stören auch keine anderen — man beachte das Zentrum der Matrizen —, andere hingegen sind starken Interferenzen unterworfen. Da die Funktionen allesamt viel länger als die Blocklänge von 256 sind, resultieren daraus ebenfalls stärkere Interblockinterferenzen, als das bei den Wavelets und den Mirrorwavelets der Fall ist. Interblockinterferenzen erstrecken sich bei Symmlet10 und Battle6 noch jeweils gut zwei Blöcke weiter nach links und rechts, sind hier aber aus Platzgründen nicht dargestellt.

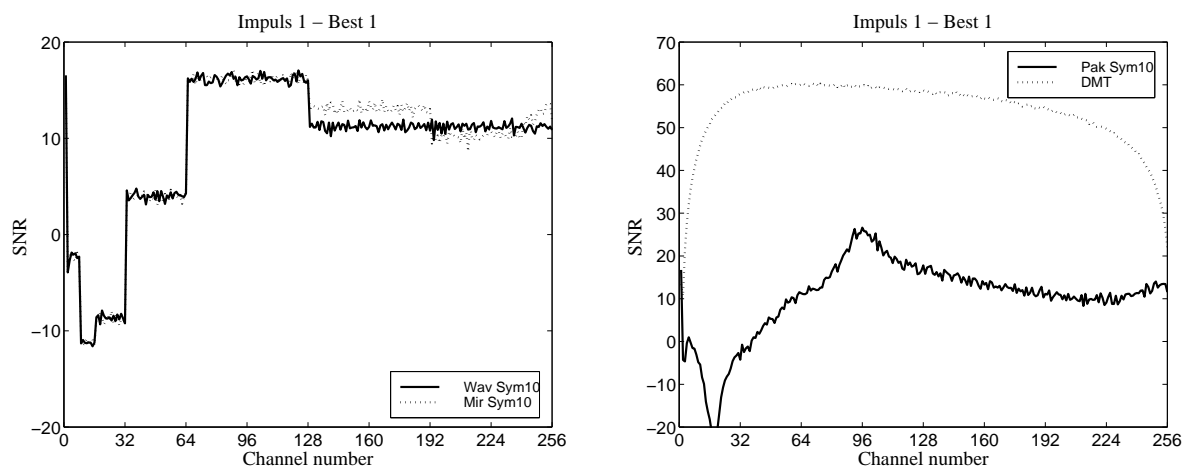


Abbildung 6.8: Dieser Vergleich ist etwas irreführend, da die komplexe Entzerrung bei DMT-ANSI wirkungsvoller ist als die reine Pegelanpassung bei den Waveletsystemen. Unentstört bieten die Mirrorwavelets noch keinen Vorteil gegenüber den Wavelets. Die Waveletpakete hingegen besitzen in diesem unentstörten Zustand ein besseres SNR als die anderen Waveletsysteme. Das Maximum bei Kanal 96 erklärt sich aus der Kombination von guter Lokalisation dieses Wavelets mit nur zwei schwachen Nebenmaxima und dem an dieser Stelle guten Frequenzgang des Kanals.

DMT-ANSI, hier einziger Repräsentant der Weyl-Heisenberg-Systeme, verursacht bei den Impulsantworten eins und zwei keine nennenswerten Interkanal- oder Intersymbolinterferenzen. Im Gegensatz dazu ist aufgrund des unstetigen Fensters das allgemeine Niveau der Grammatrix höher als bei den auf Symmetlet10 basierenden Waveletsystemen (siehe auch Abbildung 6.3). Dieses „Grundrauschen“ ist letztlich der Grund dafür, daß sich das SNR in Abbildung 6.9 nicht durch komplexere Entzerrer verbessern läßt. Die Grammatrizen verdeutlichen, daß die Perturbationsstabilität von DMT-ANSI für die hier betrachteten Impulsantworten besser ist als die der Wavelet-basierten Systeme. Diese Aussage läßt sich auch für eine große Klasse von Faltungsoperatoren, die die für ADSL relevanten beinhaltet, verallgemeinern [25, 26].

6.2 Entzerrer

Die Grammatrix erlaubt Aufschluß darüber, in welchen Kanälen zu welchem Zeitpunkt Echos der gesendeten Symbole auftauchen und wie stark diese Echos sind. Der „Best“ genannte Entzerrer durchsucht nun die Grammatrix eines Modulationssystems nach den stärksten Echos und benutzt diese, um das die Echos auslösende Symbol zu rekonstruieren. Der „Star“ genannte Entzerrer zieht hingegen die dem zu entzerrenden Symbol in Frequenz und Zeit benachbarten Symbole heran. Aus programmiertechnischen Gründen kann der „Star“-Entzerrer nur für die Entstörung von Waveletpaketen und DMT-ANSI

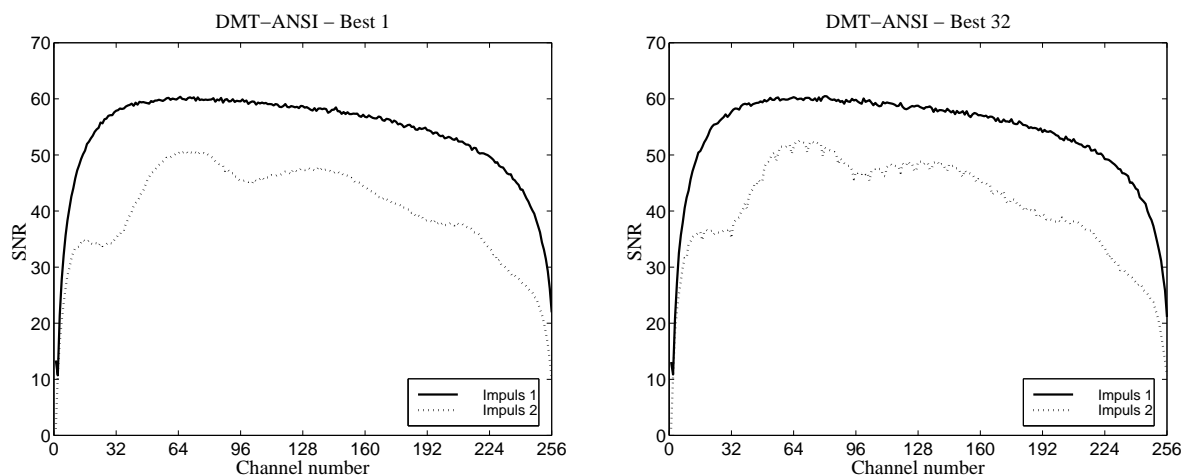


Abbildung 6.9: Ein Entzerrer, der bei den Waveletsystemen gute Resultate bringt, hat für diese Impulsantworten kaum Auswirkungen auf das SNR bei DMT-ANSI.

benutzt werden. Von der Struktur dieser Systeme her ist aber schon zu erwarten, daß er bei den Interferenzen, die bei diesen Systemen auftreten, nicht sehr effizient arbeiten wird. Diese Entzerrer versuchen also, die Grammatrizen mit möglichst wenig Aufwand lokal zu invertieren. Da die Grammatrix bei den hier betrachteten Beispielen vollen Rang hat, ist der Effekt der Faltung bei beliebig hohem Aufwand natürlich perfekt entstörbar. Aus Zeitgründen kann allerdings die Inverse der Block-Töplitz-Matrix nicht einmal annähernd ausgerechnet werden, und das Rauschen erzwingt weitere Kompromisse.

Abbildung 6.8 zeigt das SNR bei Anwendung eines „Best“-Entzerrers mit einem Koeffizienten. Dieser bewirkt bei den Wavelet-basierten Systemen nur eine Korrektur der durch den Kanal verursachten Dämpfung, bei DMT-ANSI — wie in Abschnitt 5.3 gezeigt — bereits eine fast vollständige Entstörung. Jedoch ist es bei diesem Verfahren kaum möglich, dieses bereits mit einem Koeffizienten erreichte SNR zu steigern. Dadurch, daß es keine expliziten Störer in der Grammatrix gibt, sondern nur gleichförmiges Rauschen, ist bereits mit einem Koeffizienten ein Optimum erreicht (s. Abb. 6.9). Steigert man hingegen bei den anderen Systemen die Größe des Entzerrers, so werden die SNR Kurven angehoben, und es bilden sich spezifische Muster. Die Abbildung 6.10 verdeutlicht dies: Besonders bei den Waveletpaketen kann man genau erkennen, welche Funktionen nicht durch Interkanalinterferenz beeinträchtigt werden. So sticht insbesondere der Kanal 128 hervor, dessen Funktion auch keine Nebenmaxima aufweist (s. Abb. 6.3). Die Wavelets und Mirrorwavelets verhalten sich erwartungsgemäß im linken Teil der Grafik identisch. Die Mirrorwavelets erhalten bei den Kanälen 129 bis 192 einen Schub, da in diesen Frequenzen der Kanalfrequenzgang noch moderat ist.

In Grafik 6.11 ist die mögliche Übertragungsrate über der Anzahl der Koeffizienten des „Best“-Entzerrers aufgetragen. Die mögliche Übertragungsrate wird mittels des Waterfilling-Algorithmus berechnet [1]. Dabei werden bei vorgegebener Fehlerwahrscheinlichkeit den einzelnen Kanälen je nach SNR eine Anzahl von Bits zugewiesen, die dann auf die

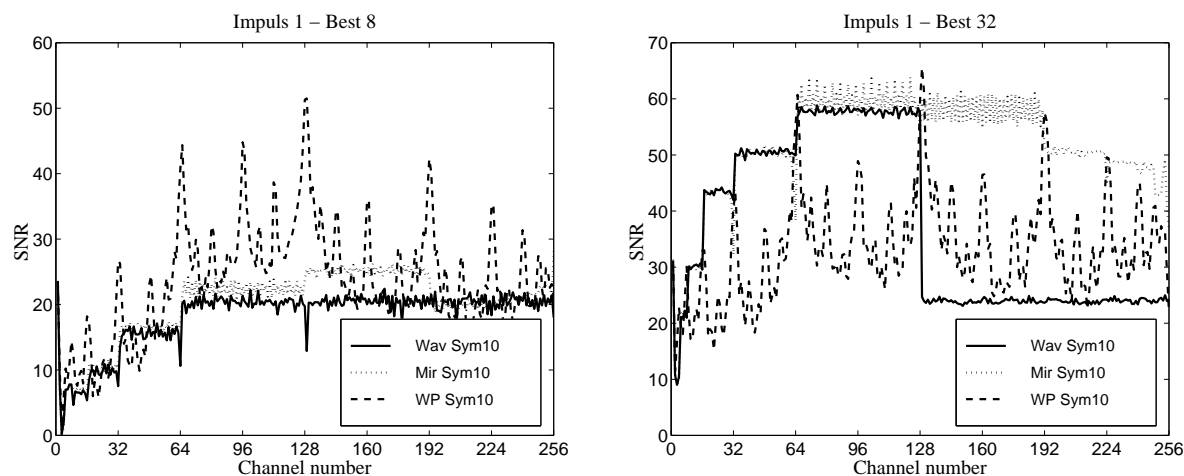


Abbildung 6.10: In diesem Bild werden die Entzerrer in einem Kanal ohne Rauschen getestet. Man sieht deutlich, wie vor allem die Wavelets und die Mirrorwavelets von den zusätzlichen Entzerrerkoeffizienten profitieren. Bei den Waveletpaketen wird insbesondere das SNR der Kanäle verbessert, die benachbart zu den Maxima liegen. Die „Täler“ hingegen werden kaum angehoben.

Gewichtsfaktoren der Übertragungsfunktionen abgebildet werden. Es ist deutlich zu sehen, wie die Übertragungsrate bei steigender Größe des Entzerrers ständig besser wird. Dabei steigt die Kurve erst stärker an und flacht dann ab. Es gilt also einen Kompromiß zu finden zwischen Entzerrergöße, die proportional zum Rechenaufwand ist, und der gewünschten Übertragungsrate. Es ist ebenfalls zu erkennen, daß sowohl das Haar-Wavelet als auch das Battle6-Wavelet schlechter abschneiden als das Symmlet10-Wavelet. Dies hat die oben genannten Gründe: Die schlechte Lokalisation im Frequenz, bzw. Zeitbereich. In demselben Bild rechts wird die Übertragungsrate von Mirrorwavelets von Symmlet10 in Kanal eins und Kanal zwei verglichen. Der Abfall bei schlechteren Übertragungsbedingungen ist immanent. Einerseits sind in Kanal zwei die Interferenzen durch die längere Impulsantwort stärker, andererseits wirkt sich durch die stärkere Dämpfung das Hintergrundrauschen stärker aus.

In Abbildung 6.10 ist zu sehen, daß bei Kanal eins bereits ein Entzerrer von etwa 32 Koeffizienten Länge genügt, um ein dem DMT-ANSI ähnliches SNR zu erlangen. In dem schlechteren Kanal zwei, in dem mehr Interferenzen zu finden sind, ist diese Größe noch nicht ausreichend. Hier genügen 128 Koeffizienten, um auf ein ähnliches Niveau zu kommen. Es ist aber zu bedenken, daß diese Bilder durch Simulationen in einem Kanal ohne Rauschen erstellt wurden. Mit Rauschen fällt das SNR auch ohne so große Entzerrer nicht so weit auseinander, wie in Abbildung 6.13 deutlich wird.

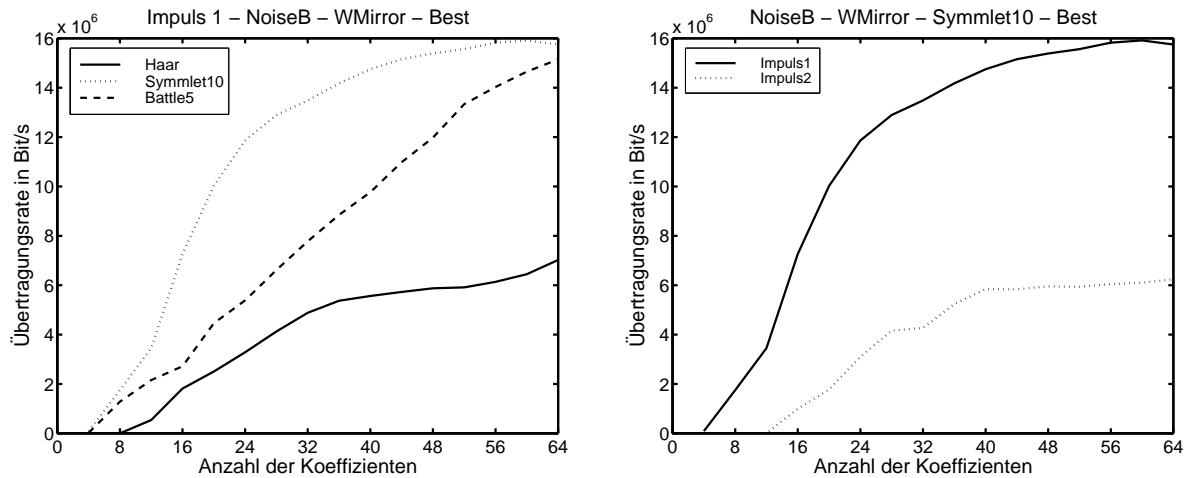


Abbildung 6.11: In der linken Figur sieht man deutlich, daß die schlechte Zeitlokalisierung der Battle6-Mirrorwavelets eine schlechtere Übertragungsrate verursacht, als es mit den Symmlet10-Mirrorwavelets möglich ist. Noch schlechter verhalten sich die Haar-Mirrorwavelets aufgrund ihrer schlechten Frequenzlokalisierung. Das rechte Bild verdeutlicht den Einfluß des Kanals auf die Übertragungsrate.

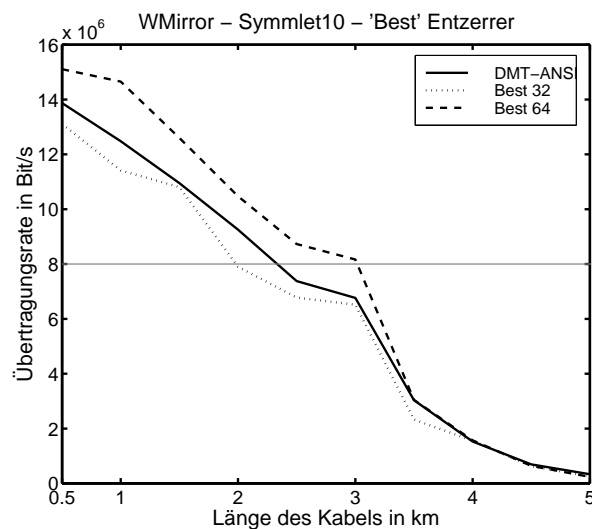


Abbildung 6.12: Bei diesen Simulationen wurde immer ein homogener Kanal mit Rauschmodell B betrachtet. Dieser direkte Vergleich zwischen Mirrorwavelets und DMT-ANSI zeigt, daß mit einem entsprechenden Entzerreraufwand und Mirrorwavelets durchaus bessere Übertragungsraten erzielt werden können, als dies mit DMT-ANSI möglich ist. 32 Koeffizienten genügen, um eine dem DMT-ANSI ähnliche Übertragungsrate zu erhalten. Mit größerem Entzerreraufwand übertrifft man dieses Standardverfahren schließlich. Die waagerechte graue Linie zeigt die für ADSL vorgesehene maximale Übertragungsrate an. Weitere Kapazität wird zur Senkung der Fehlerwahrscheinlichkeit verwandt.

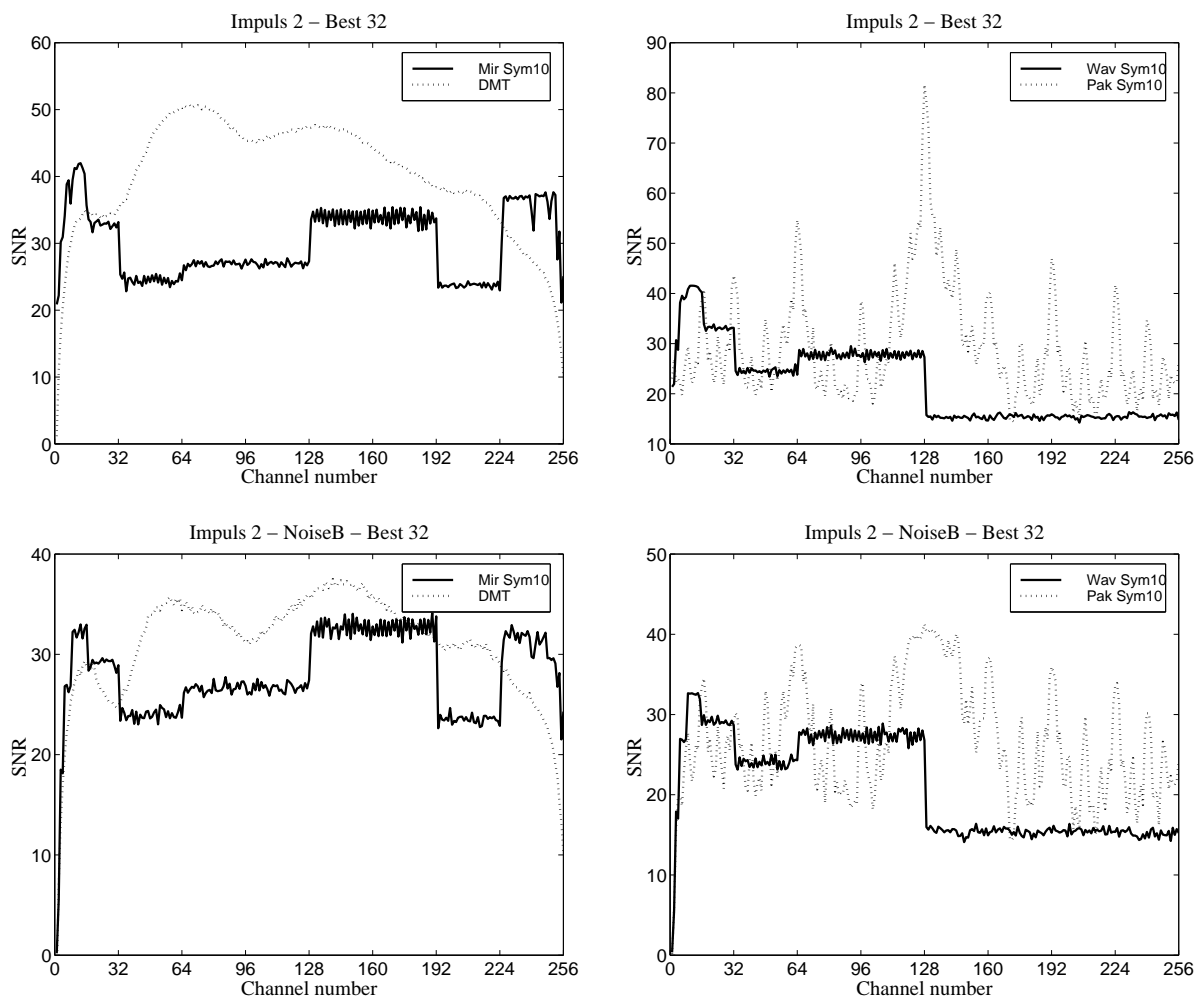


Abbildung 6.13: Bei diesem Kanal ist die Dämpfung so stark, daß das Hintergrundrauschen eine bestimmende Rolle in der SNR Kurve erhält. Das Rauschen bestimmt den maximal erreichbaren SNR Wert eines Kanals. Das ohne Rauschen bessere DMT-ANSI wird hier so gestört, daß zumindest die Mirrorwavelets wieder mithalten können. Mit einem etwas größeren Entzerrer wäre die DMT-ANSI-Kurve zu übertreffen.

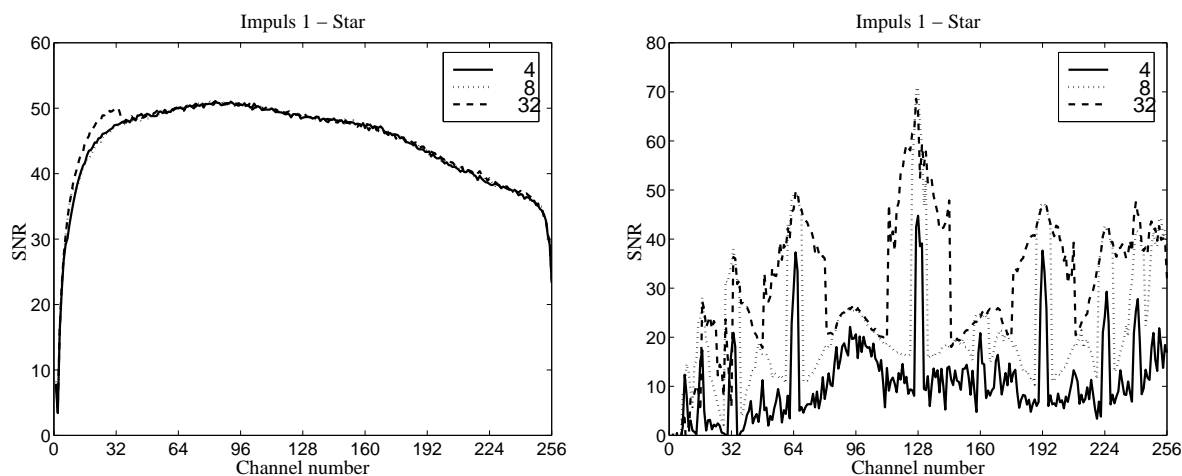


Abbildung 6.14: Der „Star“-Entzerrer kann nur für Funktionensysteme angewandt werden, die eine gleichförmige Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene zu eigen haben. Zur Entzerrung eines Koeffizienten werden jeweils die Grammatrizen $G(-3)$ bis $G(3)$ und die jeweils angegebene Anzahl von benachbarten Kanälen verwandt. Bei DMT-ANSI hat der Entzerrer erwartungsgemäß keine große Wirkung. Erst durch Einbeziehung von 32 benachbarten Kanälen hebt sich die SNR Kurve. In diesem Frequenzbereich waren auch in der Grammatrix leichte Interferenzen zu erkennen, die so korrigiert werden. Bei den Waveletpaketen weiten sich die bekannten Spitzen zu Plateaus aus, die um so breiter werden, je mehr Kanäle miteinbezogen werden. Würde man alle 256 Seitenkanäle einbeziehen, wäre zu erwarten, daß sich eine glatte Kurve auf hohem Niveau ergibt. Jedoch hat selbst die Entstörung von 32 Seitenkanälen keinen zufriedenstellenden Effekt, insbesondere da dieser Entzerrer bereits den siebenfachen Aufwand des „Best“-Entzerrers mit 32 Koeffizienten verursacht.

6.3 Fazit

Die in dieser Arbeit vorgestellten Funktionensysteme besitzen alle ihre Vor- und Nachteile. Ein gewichtiger Punkt für DMT-ANSI ist sicherlich, daß der Entzerrer-Aufwand verschwindend gering ist. Mit dem zyklischen Präfix ist ein einfaches Mittel gegeben, um Redundanz für eine höhere Übertragungsrate einzuführen. Es ist aber auch anzumerken, daß die Wavelet-basierten Systeme bei gleichem SNR eine höhere Datenübertragungsrate erreichen, da das DMT-ANSI-System eben wegen der Redundanz nicht ganz $l^2(\mathbb{Z})$ aufspannt.

Wavelets sind von allen Systemen am schnellsten zu berechnen ($O(n)$), besitzen aber ein insbesondere auf den feinsten Skalen sehr schlechtes SNR. Waveletpakete besitzen eine gute Frequenzlokalisation und sind somit auch gegen Schmalbandstörer gefeit. Wird ein Frequenzbereich stark gestört, werden die entsprechenden Funktionen einfach nicht mehr benutzt, wodurch auch die restlichen Funktionen weniger gestört werden. Außerdem genügen schon kleine Entzerrer, um die Kurve anzuheben. Die Struktur des SNR ist jedoch sehr ungünstig, da die hohen Spitzen durch das Rauschen nach unten gedrückt werden, die Täler hingegen auch mit sehr großen Entzerrern kaum angehoben werden können. Zusätz-

lich besitzt ihr Synthese- und Analyseoperator dieselbe Ordnung wie der von DMT-ANSI, so daß hier keine Zeit gewonnen werden kann, die für die aufwendige Entzerrung verwertet werden könnte.

Die Mirrorwavelets hingegen sind kaum aufwendiger zu generieren als die normalen Wavelets. Sie erreichen schon durch in der Praxis realisierbare Entzerrer mit 32 Koeffizienten dem DMT-ANSI teils überlegene, zumindest aber ähnliche SNR Kurven und somit eine ähnliche Übertragungsrate. Nachteilig wirkt sich aus, daß sie nicht gut gegen Schmalbandstörer im Frequenzbereich von 300 bis 700 MHz gefeit sind, woraus direkt ein großflächiges Absinken der SNR Kurve in diesem Bereich folgen kann.

Insgesamt läßt sich schließen, daß Wavelets eine interessante Alternative zu DMT-ANSI bilden. Wenn ein höherer Entzerreraufwand möglich wird, lassen sich so höhere Übertragungsraten realisieren. Die Wavelets gestatten zudem eine flexible Einteilung der Zeit-Frequenz-Ebene. Gelänge es, diese effizient zu nutzen und dem Kanal anzupassen, wäre es möglich, die schnelle Berechenbarkeit und geringen Nebenmaxima von Wavelets mit der guten Lokalisation von Waveletpaketen zu verbinden, ähnlich wie das ansatzweise bei den Mirrorwavelets geschehen ist. Aber schon mit der starren Einteilung der Mirrorwavelets lassen sich vergleichbare oder bessere Ergebnisse als mit DMT-ANSI erzielen.

Anhang A

Dokumentation der Simulationsumgebung

In diesem Anhang wird die Handhabung der in Matlab implementierten Simulationsumgebung beschrieben. Es werden die wichtigsten Funktionen mitsamt ihren Aufrufparametern vorgestellt. Dabei wird nach einem Top-Down-Verfahren vorgegangen, wobei zuerst die Funktionen vorgestellt werden, die die Schnittstelle zum Benutzer bilden und anschließend diejenigen Hilfsfunktionen, die essentielle Aufgaben übernehmen.

A.1 Die Simulationsumgebung

Den Kern des Softwarepakets bilden die beiden Funktionen

```
SNR = Simulation(Typ, Rep, Opt1, Opt2,...) und  
gram = create_gram(Typ, Rep, Opt1, Opt2,...).
```

Mit ihnen lassen sich die in Kapitel 6 gezeigten Grafiken erzeugen, ohne auf die restlichen

Typ	Rep	Beschreibung
'Weyl-Heisenberg'	'DMT-ANSI'	Das standardisierte Übertragungsverfahren.
'Wavelet'	'Haar' 'SymmletN' 'BattleN'	Die bekannte Haar Basis. Symmlets mit N Momenten. Battle-Lemarie Wavelets mit N Momenten.
'WPacket'	'Haar' 'SymmletN' 'BattleN'	Diese Wavelet-Pakete benutzen dieselben Filter, wie die Wavelets. Sie splitten beide Teilfunktionen auf.
'WMirror'	'Haar' 'SymmletN' 'BattleN'	Diese Wavelet-Pakete benutzen dieselben Filter, wie die Wavelets. Das Tiling ist aus [23] entnommen.

Tabelle A.1: Basenauswahl

Opt1	Opt2	Opt3	Beschreibung
'Delta'			Ein einfacher Deltaimpuls eines perfekten Kanals. Wird kein anderer Kanal gewählt so wird dieser benutzt.
'Impuls1'	Name	Imp	Dies ist Kanal 1 aus Abbildung 5.1.
'Impuls2'			Dies ist Kanal 2 aus Abbildung 5.1.
'ImpDefault'			Mit <code>ImpDefault</code> kann man eigene Impulsantworten in das Simulationssystem einspeisen. <code>Name</code> gibt eine alphanumerische Bezeichnung für den Kanal an und <code>Imp</code> ist ein Spaltenvektor mit der Impulsantwort.
'NoiseOff'	Level		Mit diesem Parameter kann das Rauschen im Kanal ausgeschaltet werden. Diese Option ist standardmäßig gewählt.
'NoiseA'			Diese Option schaltet das Rauschmodell A aus [16] ein.
'NoiseB'			Durch diese Option wird das Rauschmodell B aus [16] eingeschaltet.
'NoiseLevel'			Mit diesem Parameter kann die Menge des weißen Rauschens im Kanal verändert werden. Die Angabe ist in dB relativ zum Sendesignal. Durch Angabe dieser Option wird das Rauschen automatisch eingeschaltet. Voreingestellt ist ein rauschfreier Kanal.

Tabelle A.2: Kanalverhalten

Opt1	Opt2	Beschreibung
'Periods'	Anz	Anzahl der zu sendenden Blöcke. Standard sind 512 Perioden.
'Guardtime'	Anz	Dieser Parameter ermöglicht es, etwas Platz zwischen den einzelnen Sendeblocken zu lassen. Dabei ist zu beachten, daß evtl. die Biorthogonalität der Funktionensysteme verloren geht. Wird dieser Parameter nicht angegeben, wird keine Schutzzeit verwendet.
'Basesize'	Anz	Dies ist die Anzahl der Basen in einem Block. Es muß immer eine Zweier-Potenz gewählt werden. Die voreingestellte Standardgröße ist 256.
'Delay'	Anz	Die kanalimmanente Verzögerung kann hier manuell reguliert werden. Dies ist besonders bei selbst produzierten Impulsantworten anzuraten, da die Entzerrer nicht dafür ausgelegt sind die Kanalverzögerung auszugleichen.

Tabelle A.3: Sonstiges

Opt1	Opt2	Beschreibung
'Best'	Anz	Dieser LMS-Entzerrer benutzt diejenigen Anz Koeffizienten zum Entstören, die beim Senden eines Symbols die meiste Energie erhalten.
'Star'	[Anzf, Anzz]	Dieser LMS-Entzerrer benutzt die „benachbarten“ Koeffizienten zum Entstören. Dazu zieht er die Anzz vorhergehenden und nachfolgenden Blöcke heran und aus dem selben Block die Anzf benachbarten. Das macht natürlich nur Sinn, wenn die Basis entsprechend sortiert ist, d.h. bei Weyl-Heisenberg-, Wilson- und Wavelet-Paket-Systemen.

Tabelle A.4: Entzerrer

Funktionen des Softwarepakets zurückgreifen zu müssen; sie bilden die Benutzerschnittstelle. `Simulation` wird benutzt, um eine Datenübertragung zu simulieren, `create_gram`, um einen Teil der Grammatrix des Funktionensystems bezüglich eines Kanals zu berechnen. Sie werden hier zusammen vorgestellt, da sie bis auf wenige Unterschiede mit denselben Parametern aufgerufen werden. Die ersten beiden Übergabeparameter dienen zur Bestimmung des zu benutzenden Funktionensystems. In Tabelle A.1 sind die derzeit implementierten Systeme aufgelistet. Die Programme sind so aufgebaut, daß leicht weitere Systeme hinzugefügt werden können. Der erste Parameter dient zur Auswahl der Gruppe, der zweite zur Auswahl des konkreten Systems. Diese Parameter werden an die eigentlichen Modulations- und Demodulationsfunktionen weitergegeben, die in Abschnitt A.2 beschrieben werden.

Die Funktion `Simulation` liefert einen Vektor zurück, in den für jede Basisfunktion das Signal-to-noise Verhältnis in dB eingetragen ist. Dieses wird experimentell durch das simulierte Senden von gaußverteilten unabhängigen Zufallsvariablen bestimmt. Durch den optionalen Parameter `'Periods'`, dem die Anzahl der zu sendenden Blöcke folgen muß, kann die Güte des SNR-Vektors gegen die Dauer des Experimentes abgewogen werden. Voreingestellt sind 512 Sendeblocke.

Das Kanalverhalten wird über die in Tabelle A.2 vorgestellten Parameter bestimmt. Werden keine dieser Parameter benutzt, wird ein perfekter, nicht verrauschter Kanal verwendet. Wenn ein verrauschter Kanal benutzt werden soll, kann über den Parameter `'NoiseLevel'` ein additives weißes Gaußsches Rauschen hinzugefügt werden. Der numerische Parameter bestimmt die Stärke des Leistungsdichtespektrum in dB. Während der Simulation wird das aus dem Rauschen resultierende SNR des Kanals ausgegeben.

Über die optionalen Parameter können weitere Modifikationen getroffen werden. Entzerrer können über die Parameter in Tabelle A.4 zugeschaltet werden. Die restlichen Parameter werden in Tabelle A.3 beschrieben.

A.2 Modulations- und Demodulationsfunktionen

Die Schnittstelle zu den Analyse- und Syntheseoperatoren wird durch

```
sig = Modulation(Typ, Rep, Basesize, data) und
data = Demodulation(Typ, Rep, Basesize, sig)
```

gebildet. Die Parameter `Typ` und `Rep` sind so zu bedienen, wie es in Tabelle A.1 beschrieben ist. `Basesize` gibt die Anzahl der in einem Translationsblock enthaltenen Funktionen an. Es sollte sich dabei um eine Zweierpotenz handeln.

`data` ist ein Spaltenvektor in der Länge von `Basesize`, in dem — je nach Funktionensystem — die komplexen oder reellen Daten enthalten sind. Dabei werden die Daten ihrem Index entsprechend den Funktionen eines Blockes zugeordnet: Mit aufsteigendem Index steigt die Mittelfrequenz der zugeordneten Funktion. Befinden sich mehrere Funktionen in demselben Frequenzband, so entscheidet die zeitliche Lokalisation — größere Indizes entsprechen späterer zeitlicher Lage.

Das gesendete oder empfangene Signal wird im Spaltenvektor `sig` übergeben. Die Länge dieses Vektors ist von dem verwendeten Repräsentanten des Funktionensystems abhängig.

A.3 Entzerrer

Momentan stehen zwei verschiedene Entzerrer zur Verfügung.

```
[data, eqff] = best_eq(data, eqff)
```

gestattet eine freie Gestaltung der zur Entzerrung verwendeten Koeffizienten. `data` ist in diesem Fall eine Matrix, in deren Spalten sich die Koeffizienten eines Blockes befinden. `eqff` ist eine dreidimensionale Matrix, in der alle benötigten Informationen gespeichert werden. Für nähere Informationen zur Datenstruktur sei auf die Online-Dokumentation in der Prozedur `[eqff] = create_best_eq(gram, size)` verwiesen. Diese Prozedur kann zur Initialisierung des Entzerrers verwendet werden. Sie sucht aus dem ihr zu Verfügung stehenden Ausschnitt der Grammatrix, die durch das Funktionensystem und den Kanal determiniert wird, die Koeffizienten heraus, die den größten Teil der Energie eines Sendesymbols enthalten. Anschließend werden die Werte der Koeffizienten des Entzerrers mit einem Zero-Forcing Entzerrer initialisiert. Wird `size` gleich eins gesetzt, so wird bei reellen Symbolen nur die Dämpfung des Kanals ausgeglichen. Bei komplexen Kanälen ist das Verhalten des Entzerrers naturgemäß effizienter, so daß bei DMT-ANSI je nach Kanal schon in diesem Fall mit einem Koeffizienten sehr gute Ergebnisse erzielt werden können.

```
[data, eqff, eqfb] = star_eq(data, eqff, eqfb)
```

ist sehr viel eingeschränkter in der Auswahl seiner Koeffizienten und ist nur für Funktionensysteme sinnvoll, deren Funktionen verschiedene, gleich große Frequenzbänder benutzen. Er verwendet die einem Kanal zu beiden Seiten benachbarten Kanäle und die zeitlich vor und hinter ihm gelegenen Koeffizienten zur Entstörung. Er läßt sich durch die Funktion

```
[eqff, eqfb] = create_star_eq(gram, AnzF, AnzZ)
```

initialisieren. `AnzZ` ist die Anzahl der zeitlich vor und hinter dem zu entstörenden Symbol verwendeten Koeffizienten. `AnzF` gibt die Anzahl der Seitenkanäle an. Ist `AnzZ` Null, so ist

es ein einfacher eindimensionaler Entzerrer.

A.4 Wavelets

Zum Schluß sollen noch kurz die Wavelet-Synthese- und Analyseoperatoren vorgestellt werden. Es sind insgesamt vier Funktionen vorhanden:

```
sig = WPSy (n, mask, data, h, g),
sig = PWPSy(n, mask, data, h, g),
data = WPAn (n, mask, sig, hs, gs),
data = PWPAn(n, mask, sig, hs, gs).
```

Dabei sind `WPSy` und `WPAn` die in Kapitel 4 besprochenen Operatoren, `PWPSy` und `PWPAn` implementieren hingegen die periodischen Transformationen, die oft in der Bildverarbeitung verwendet werden. `n` gibt die Anzahl der Skalen an, die verwendet werden sollen. `mask`, `h`, `g`, `hs`, `gs` legen das Tiling und die Filter fest. Sie können über die Funktion `[mask, h, g, hs, gs] = get_wavelet(Typ, Rep, n)` initialisiert werden. Nähere Informationen zur Datenstruktur von `mask` sind in der Funktion `get_wavelet_mask` zu finden. `data` ist immer ein reeller Spaltenvektor der Länge 2^n und `sig` ist ein reeller Spaltenvektor, der das erzeugte oder das zu analysierende Signal beinhaltet.

Alle hier nicht erwähnten Funktionen sind ausreichend im Quelltext dokumentiert. Insbesondere die vielen Hilfsfunktionen würden den Rahmen dieses Anhangs sprengen. Zum Studium des Softwarepakets sei als Einstieg die Funktion `Simulation` empfohlen. In ihr werden alle benötigten Initialisierungen durchgeführt und fast alle anderen Funktionen (häufig indirekt) aufgerufen. Insbesondere das Konzept des Speicherns und Ladens relevanter Daten, wie den trainierten Entzerrerkoeffizienten, ist gut erklärt.

Literaturverzeichnis

- [1] AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE: *Interface between networks and customer installation - asymmetric digital subscriber line (ADSL) metallic interface*. volume ADSL ANSI T1E1.4/97-007R6, September 1997.
- [2] BITTNER, KAI: *Verallgemeinerte Klappoperatoren und Biorthogonale Wilson-Basen*. Doktorarbeit, Technische Universität München, 2000. Shaker Verlag, Aachen.
- [3] BLINN, THOMAS: *Adaptive Zeitbereichsentzerrung bei ADSL*. Diplomarbeit, Hochschule für Technik und Wirtschaft des Saarlandes in Saarbrücken, 1999.
- [4] CASAZZA, PETER G. and OLE CHRISTENSEN: *Weyl-Heisenberg frames for subspaces of $L^2(\mathbb{R})$* . to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [5] COHEN, A., I. DAUBECHIES, and J.-C. FEAUVEAU: *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*. Communications on Pure and Applied Mathematics, XLV:485–560, 1992.
- [6] COHEN, ALBERT and INGRID DAUBECHIES: *A stability criterion for biorthogonal wavelet bases and their related subband coding scheme*. Duke Mathematical Journal, 68(2):313–335, November 1992.
- [7] COHEN, ALBERT and INGRID DAUBECHIES: *On the instability of arbitrary biorthogonal wavelet packets*. SIAM J. Math. Anal., 24(5):1340–1354, 1993.
- [8] CONWAY, JOHN B.: *A Course in Functional Analysis*. Springer, New York, second edition, 1990.
- [9] DAHMEN, W.: *Some remarks on multiscale transformations, stability and biorthogonality*. In LAURENT, P. J., A. LE MÉHAUTÉ, and L. L. SCHUMAKER (editors): *Wavelets, Images and Surface Fitting*, pages 157–188. AK Peters, Wellesley, Massachusetts, 1994.
- [10] DAHMEN, W.: *Stability of multiscale transformations*. Journal of Fourier Analysis and Applications, (2):341–361, 1996.
- [11] DAUBECHIES, I., S. JAFFARD, and J. L. JOURNÉ: *A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay*. SIAM J. Math. Anal., 22:554–572, 1991.

- [12] DAUBECHIES, INGRID: *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Math., Philadelphia, 1992.
- [13] DAUBECHIES, INGRID: *Orthonormal bases of compactly supported wavelets: II Variations on a theme*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 24(2):499–519, March 1993.
- [14] DEUFLHARD, PETER and ANDREAS HOHMANN: *Numerische Mathematik I*. Walter de Gruyter, 1993.
- [15] DUFFIN, R. J. and A. C. SCHAFFER: *A class of nonharmonic Fourier series*. Trans. Amer. Math. Soc., 72:341–366, 1952.
- [16] EUROPEAN TELECOMMUNICATION STANDARDS INSTITUTE: *Transmission and multiplexing: Asymmetric digital subscriber line (ADSL); requirements and performance*. volume ETSI ETR 328, November 1996.
- [17] FEICHTINGER, HANS G. and THOMAS STROHMER (editors): *Gabor Analysis and Algorithms: Theory and Applications*. Birkhäuser, Boston, 1998.
- [18] FISCHER, WOLFGANG und INGO LIEB: *Funktionentheorie*. Vieweg, Vierte Auflage, 1985.
- [19] FRAUNHOFER INSTITUT FÜR FESTKÖRPERTECHNOLOGIE: *Abschlußbericht DSLSIM*, Dezember 1998.
- [20] GERSHO, ALLEN and ROBERT M. GRAY: *Vector Quantization and Signal Compression*. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [21] GRIP, NIKLAS: *Hilbert space frames and base, a comparison of Gabor and wavelet frames and applications to multicarrier digital communications*. licentiate thesis, <http://www.sm.luth.se/~grip/Research/publications.html>, 2000.
- [22] JANSSEN, A. J. E. M.: *From continuous to discrete Weyl-Heisenberg frames through sampling*. Journal of Fourier Analysis and Applications, 3(5):583–595, 1997.
- [23] KALIFA, JÉRÔME and STÉPHANE MALLAT: *Thresholding estimators for inverse problems and deconvolutions*. submitted to Annals of Statistics, 1999.
- [24] KAMMEYER, KARL DIRK: *Nachrichtenübertragung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage, 1996.
- [25] KOZEK, WERNER, GÖTZ PFANDER, JÖRN UNGERMANN, and GEORG ZIMMERMANN: *A comparison of various MCM schemes*. In *Proc. 5th Int. OFDM Workshop*, pages 20–1–20–4, Hamburg (Germany), Sept. 2000.

- [26] KOZEK, WERNER, GÖTZ PFANDER, and GEORG ZIMMERMANN: *Perturbation stability of coherent Riesz systems under convolutions and additive noise*. submitted to Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis, 2000.
- [27] LINDSEY, ALAN R.: *Generalized orthogonally multiplexed communication via wavelet packet bases*. PhD thesis, Ohio University, 1995.
- [28] LOUIS, A. K., P. MAASZ und A. RIEDER: *Wavelets*. Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart, 1994.
- [29] MALLAT, STÉPHANE: *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, second edition, 1999.
- [30] OPPENHEIM, A.V. and R.W. SCHAFER: *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, New Jersey, 1975.
- [31] PORAT, B.: *Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods*. Englewood Cliffs (NJ), 1994.
- [32] PROAKIS, JOHN G. and MASOUD SALEHI: *Communication Systems Engineering*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1994.
- [33] RON, AMOS and ZUOWEI SHEN: *Frames and stable bases for shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$* . Can. J. Math, 47(5):1051–1094, 1995.
- [34] RON, AMOS and ZUOWEI SHEN: *Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in $L_2(\mathbb{R}^d)$* . Technical Report 95-03, University of Wisconsin, Madison, 1995.
- [35] STROHMER, THOMAS: *Rates of convergence for the approximation of dual shift-invariant systems in $l^2(\mathbb{Z})$* . Journal of Fourier Analysis and Applications, 5(6):599–615, 2000.
- [36] TANENBAUM, ANDREW S.: *Computer Networks*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, third edition, 1996.
- [37] VAIDYANATHAN, P. P.: *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1993.
- [38] WICKERHAUSER, MLADEN VICTOR: *Adaptive Wavelet-Analysis*. Vieweg, 1993.
- [39] ZALIK, R. A.: *Riesz bases and multiresolution analyses*. Applied and Computational Harmonic Analysis, 7:315–331, 1999.